

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

**CURVE ALGEBRICHE  
E MACCHINE MATEMATICHE**

**Percorso per la scuola secondaria  
di secondo grado**

**Tesi di Laurea in Didattica della Matematica**

**Relatore:**  
Prof.ssa  
Cattabriga Alessia

**Presentata da:**  
Anna Lanzarini

**Correlatore:**  
Prof.  
Casali Maurizio

**IV Appello di Laurea  
Anno Accademico 2021/2022**



# Introduzione

Nella scuola primaria, spesso gli studenti sono invitati a svolgere attività pratiche, che contemplano l'uso di oggetti concreti da manipolare. Queste attività si vanno sempre più a diradare, fino a quando, solitamente, durante la scuola secondaria di secondo grado lo studente apprende attraverso spiegazioni teoriche supportate solo dall'utilizzo della lavagna da parte del docente. Il ragazzo non è più parte attiva della lezione, ma diventa spettatore passivo. Per quanto riguarda la matematica, in particolare, essa risulta un insieme di formule e definizioni da imparare a memoria; non è necessario capire cosa si sta dicendo o perché, l'importante è imparare bene tali nozioni per superare con successo la verifica in classe, per poi dimenticare tutto ciò che si è appreso. La materia diventa noiosa, incomprensibile, inutile. Eppure, la matematica è molto più di questo. Gli studenti devono essere lasciati liberi di esplorare, procedere per tentativi, sbagliare e ricominciare, fino ad arrivare ad una comprensione profonda e duratura degli argomenti affrontati, che non sono più informazioni esterne inserite a forza, ma scoperte affascinanti. L'attività laboratoriale, in particolare supportata da strumenti concreti, può essere utile per far riaccendere l'interesse negli studenti. Proporre delle attività in cui è necessario l'utilizzo del disegno può aiutare loro ad appropriarsi del controllo teorico sull'immagine, che si accompagna così ad un pensiero analitico rigoroso: il disegno diventa strumento per formulare ragionamenti logici ed arrivare ad un rigore formale e all'appropriazione dei concetti figurali, definiti da Fischbein in [6] come entità mentali che riflettono proprietà spaziali e al contempo possiedono caratteristiche concettuali, come la perfezione e l'astrazione. Attraverso i laboratori, gli studenti imparano a manipolare oggetti e figure arrivando a non accontentarsi più della sola approssimazione del disegno, ma usandolo come strumento per giungere alla formalizzazione.

Le macchine matematiche, in particolare i tracciatori di curve, sono strumenti in legno perfetti per questo scopo: gli studenti si trovano davanti oggetti concreti che tracciano curve, ed essi fungono da punto di partenza per un processo logico e formale che porta alla ricerca della definizione delle curve e

ad una generalizzazione. Gli studenti non focalizzano più la loro attenzione esclusivamente sul disegno realizzato, ma la figura diventa rappresentazione di un concetto generale. Inoltre, attraverso le macchine matematiche essi possono ampliare le loro conoscenze studiando, oltre alle coniche, curve che solitamente non si affrontano a scuola, come la conoide di Nicomede o la lemniscata di Bernoulli. Imparano così ad avere un vero approccio di tipo matematico, usando le loro conoscenze pregresse per fare nuove scoperte, attraverso ipotesi, sbagli e dimostrazioni.

Altro aspetto importante è che, attraverso le macchine matematiche, risulta naturale immergersi in una dimensione storica, arrivando ad interrogarsi sul rapporto tra matematica, storia e cultura, dal momento che esse sono state costruite tenendo conto della letteratura scientifico-tecnica dall'antica Grecia fino ai primi del '900. Tale approccio permette agli studenti di contestualizzare storicamente problemi e concetti e di porsi quesiti come ad esempio "cosa è successo in passato e perché?", "come si è giunti all'approccio odierno?"; viene favorita in tal modo la curiosità degli studenti che, a partire da domande come "perché le coniche si chiamano in questo modo?", possono arrivare ad ampliare il proprio bagaglio di conoscenze. Inoltre, attraverso un approccio storico, si può osservare la matematica sotto diversi punti di vista, sradicando la convinzione che essa sia un mero insieme di nozioni, ma rendendola materia viva e calata nel contesto culturale.

Infine, un altro vantaggio dell'uso di tali strumenti è il naturale passaggio all'oggetto virtuale: siccome gli studenti utilizzano macchine concrete, è normale trovarsi di fronte a limiti e vincoli fisici, che conducono ad approssimazioni e a disegni poco precisi. L'utilizzo di software di geometria dinamica appare la soluzione più accettabile per risolvere tali problemi. Il software permette una maggior precisione, oltre a favorire la dinamicità, ovvero la capacità di muovere e trasformare i disegni, per costruire un'immagine mentale più flessibile e meno influenzabile da stereotipi. Geogebra è uno dei software più famosi ed utilizzati per tali scopi.

Alla luce di tali riflessioni, ho realizzato un progetto che prevedesse l'utilizzo di alcune macchine matematiche che tracciano curve e di Geogebra. L'attività laboratoriale è stata svolta durante una scuola estiva tenuta presso il Liceo Augusto Righi di Bologna, insieme a sette studenti di diverse età e classi, dall'ultimo anno di scuola secondaria di primo grado fino al terzo anno di scuola secondaria di secondo grado. Attraverso la tesi si analizzano le potenzialità di tale percorso, i limiti e le difficoltà. Un progetto sulle macchine matematiche, che prende in considerazione in particolare il parabolografo a filo, l'ellissografo a filo e il parabolografo di Cavalieri, è stato realizzato qualche anno fa da Alessia Raggi e Ludovica Di Nicolantonio, descritto nelle loro



tesi [17] e [15]. Da queste ho preso spunto per la realizzazione delle schede guida che sono state presentate agli studenti durante l'attività.

La trattazione si articola in quattro capitoli.

Nel Capitolo 1 si analizza il quadro teorico alla base del progetto scolastico realizzato. In particolare, dopo aver osservato il quadro di riferimento europeo e le Indicazioni Nazionali per il Liceo scientifico, si pone l'attenzione sui concetti figurali; in relazione alle macchine matematiche utilizzate nell'attività laboratoriale, si mette in evidenza la distinzione tra oggetto fisico e oggetto ideale, per poi giungere alla descrizione dell'oggetto virtuale e di software di geometria dinamica.

Per approfondire l'argomento, si possono consultare articoli come [6], [11], [12], [5] che, oltre ad analizzare la teoria dei concetti figurali, propongono anche attività didattiche esponendone limiti e potenzialità.

Nel Capitolo 2 si analizzano le curve piane, soffermandosi principalmente su quelle algebriche, seguendo un approccio storico. Si inizia descrivendo gli studi dei matematici greci su coniche e altri tipi di curve usate per risolvere alcuni problemi classici dell'antichità. Si prosegue descrivendo gli studi affrontati durante il Rinascimento, periodo in cui si riscopre un nuovo interesse verso l'argomento; in particolare ci si sofferma sugli studi di Descartes. In seguito si analizzano nuovamente le coniche seguendo l'approccio di Newton e si introducono le curve trascendenti legate agli studi di Leibniz. Infine, si espone l'approccio di Desargues e Pascal, che osservano le coniche secondo gli studi di prospettiva, per concludere con i contributi di Plücker.

Se si desidera approfondire l'argomento dal punto di vista storico o matematico, si possono consultare opere di matematici come [8] e [4], eventualmente accompagnate da commenti e spiegazioni, libri che descrivono gli studi delle curve, come [2], [10], [9] e [7], oltre a diversi articoli che analizzano opere di matematici, come l'articolo [16] che prende in considerazione l'opera di Descartes.

Nel Capitolo 3 viene descritto il percorso laboratoriale sulle curve che utilizza le macchine matematiche e il software Geogebra destinato a studenti di scuola secondaria di secondo grado. Dopo aver analizzato gli obiettivi e le finalità dell'attività, si procede con la descrizione del materiale costruito per il percorso, concentrandosi in particolare sulle schede che guidano l'attività con le macchine matematiche. Inoltre, viene descritta la costruzione di alcune delle macchine matematiche che sono state realizzate appositamente per il percorso.

Nel Capitolo 4 si descrive la sperimentazione del percorso laboratoriale attuata durante una scuola estiva presso il Liceo Augusto Righi di Bologna, rivolto a studenti di diverse età e classi. Nella prima parte si descrive la

struttura della sperimentazione suddivisa nelle quattro giornate di attività, mentre nella seconda si analizzano le risposte date dagli studenti e le riflessioni emerse dalle discussioni. Si termina la trattazione evidenziando aspetti positivi e criticità del progetto.

In Appendice A sono riportate le schede guida progettate ed utilizzate durante l'attività laboratoriale, riferite alle seguenti macchine: il parabolografo di Cavalieri, l'ellissografo di Proclo, l'iperbolografo a filo, la lemniscata di Bernoulli, la curva kappa e la concoide di Nicomede.

In Appendice B si espongono le schede illustrative delle macchine prese dal Laboratorio delle Macchine Matematiche di Bologna, che si possono consultare sul sito <http://www.matlabrighibo.it/macchine-matematiche/>, e le schede illustrative delle macchine da me realizzate. Ciascuna di esse è corredata da una fotografia, un'immagine virtuale della macchina e una breve descrizione della struttura e del funzionamento.

# Indice

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introduzione</b>  | <b>i</b>  |
| <b>1 Il quadro teorico di riferimento</b>  | <b>1</b>  |
| 1.1 Le Indicazioni Nazionali . . . . .   | 1         |
| 1.2 Dalla distinzione tra concetto e immagine ai concetti figurali . . . . .               | 4         |
| 1.2.1 Manipolazione dell'oggetto geometrico . . . . .                                      | 6         |
| 1.2.2 Dal disegno reale all'oggetto virtuale . . . . .                                     | 7         |
| <b>2 Le curve algebriche nella storia</b>  | <b>11</b> |
| 2.1 Le curve nell'antica Grecia . . . . .  | 12        |
| 2.1.1 I problemi classici dell'antichità . . . . .   | 13        |
| 2.2 Le curve nel Rinascimento . . . . .  | 25        |
| 2.2.1 La Géométrie di Descartes . . . . .  | 26        |
| 2.2.2 Le curve studiate dal punto di vista analitico . . . . .                             | 33        |
| 2.3 Le curve dopo il Rinascimento . . . . .  | 47        |
| 2.4 L'approccio di Newton alla teoria delle curve . . . . .                                | 53        |
| 2.4.1 Descrizione delle cubiche . . . . .  | 55        |
| 2.5 L'approccio di Leibniz . . . . .   | 57        |
| 2.6 La geometria proiettiva e la teoria delle curve nella geometria<br>algebrica . . . . . | 59        |
| 2.6.1 Contributi matematici di Plücker . . . . .   | 60        |
| <b>3 Progettazione dell'attività</b>   | <b>65</b> |
| 3.1 Obiettivi dell'attività . . . . .  | 65        |
| 3.2 Materiali utilizzati . . . . .   | 67        |
| 3.2.1 Le macchine matematiche . . . . .  | 67        |
| 3.2.2 Schede guida . . . . .   | 73        |
| <b>4 Sperimentazione e analisi dell'attività</b>   | <b>91</b> |
| 4.1 Sperimentazione dell'attività . . . . .  | 91        |
| 4.1.1 Prima lezione . . . . .  | 92        |

---

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 4.1.2    | Seconda lezione . . . . .                                  | 95         |
| 4.1.3    | Terza lezione . . . . .                                    | 96         |
| 4.1.4    | Quarta lezione . . . . .                                   | 97         |
| 4.2      | Analisi dell'attività . . . . .                            | 98         |
| 4.2.1    | Osservazioni generali . . . . .                            | 98         |
| 4.2.2    | Analisi della scheda A: il parabolografo di Cavalieri . .  | 100        |
| 4.2.3    | Analisi della scheda B: l'ellissografo di Proclo . . . . . | 102        |
| 4.2.4    | Analisi della scheda C: l'iperbolografo a filo . . . . .   | 104        |
| 4.2.5    | Analisi della scheda D: la lemniscata di Bernoulli . . .   | 108        |
| 4.2.6    | Analisi della scheda E: la curva kappa . . . . .           | 111        |
| 4.2.7    | Analisi della scheda F: la concoide di Nicomede . . . .    | 114        |
| 4.2.8    | Geogebra . . . . .   | 117        |
| 4.3      | Conclusioni finali . . . . .                               | 119        |
| <b>A</b> | <b>Schede delle attività laboratoriali</b>                 | <b>121</b> |
| <b>B</b> | <b>Schede illustrative delle macchine matematiche</b>      | <b>159</b> |



# Capitolo 1

## Il quadro teorico di riferimento

In questo capitolo si analizzerà il quadro teorico alla base del progetto scolastico realizzato e descritto in maniera approfondita nel Capitolo 3. In particolare, dopo aver osservato il quadro di riferimento europeo e le Indicazioni Nazionali per il Liceo scientifico, si porrà l'attenzione sui concetti figurali; in relazione alle macchine matematiche utilizzate nell'attività laboratoriale, si metterà in evidenza la distinzione tra oggetto fisico e oggetto ideale, per poi giungere alla descrizione dell'oggetto virtuale.

### 1.1 Le Indicazioni Nazionali

L'insegnante deve progettare il percorso didattico con lo scopo di formare persone competenti e inserite adeguatamente nella società. È, dunque, necessario avere obiettivi e traguardi ampi e condivisi per lo sviluppo dell'individuo. A tal proposito, è stato redatto nel 2018 il quadro comune delle competenze chiave per l'apprendimento permanente, definite dal Parlamento europeo e dal Consiglio dell'Unione europea. Nel documento si stilano otto competenze chiave che contribuiscono «a una vita fruttuosa nella società»<sup>1</sup>. Inoltre, «elementi quali il pensiero critico, la risoluzione di problemi, il lavoro di squadra, le abilità comunicative e negoziali, le abilità analitiche, la creatività e le abilità interculturali sottendono a tutte le competenze chiave».<sup>2</sup> Tra esse, è descritta anche la «competenza matematica e competenza in scienze, tecnologie e ingegneria».<sup>3</sup> Essa, più che ai contenuti, si riferisce al ragionamento matematico e alla «capacità di sviluppare e applicare il pensiero e la comprensione matematici per risolvere una serie di problemi in

---

<sup>1</sup>Si veda [3, p. 7].

<sup>2</sup>Ibidem.

<sup>3</sup>Ibidem.

situazioni quotidiane». <sup>4</sup> Il pensiero matematico, basato su riflessione, osservazione, analisi e deduzione, permette di acquisire un atteggiamento critico anche all'interno di situazioni quotidiane.

Sulla stessa linea del quadro di riferimento europeo, nel 2012 in Italia sono state elaborate le Indicazioni Nazionali per il curriculum della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione e nel 2010 le Indicazioni Nazionali per i Licei. Esse forniscono un quadro di riferimento per costruire un curriculum in cui il fulcro non sono i contenuti ma gli obiettivi di apprendimento. Il documento relativo ai Licei è organizzato nel modo seguente: dopo aver descritto il profilo educativo, culturale e professionale dello studente, si analizzano gli obiettivi specifici declinati a seconda della tipologia di liceo e in base alle diverse discipline. In particolare, nell'ambito matematico è richiesto che «al termine del percorso didattico lo studente avrà approfondito i procedimenti caratteristici del pensiero matematico» e «saprà applicare quanto appreso per la soluzione di problemi». <sup>5</sup> Sebbene per il Liceo scientifico sia espressa una maggiore importanza per gli aspetti tecnici, l'indicazione principale è «pochi concetti e metodi fondamentali, acquisiti in profondità». <sup>6</sup> Andando più nello specifico nell'ambito del progetto descritto nel Capitolo 3, cioè quello geometrico, e soffermandosi sugli obiettivi per il primo biennio, livello al quale apparteneva la quasi totalità degli studenti che hanno partecipato alla sperimentazione, si legge: <sup>7</sup>

*«La realizzazione di costruzioni geometriche elementari sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali (in particolare la riga e compasso, sottolineando il significato storico di questa metodologia nella geometria euclidea), sia mediante programmi informatici di geometria.»*

*«Lo studente apprenderà a far uso del metodo delle coordinate cartesiane.»*

*«L'intervento dell'algebra nella rappresentazione degli oggetti geometrici non sarà disgiunto dall'approfondimento della portata concettuale e tecnica di questa branca della matematica.»*

Siccome l'argomento affrontato nel progetto è stato quello delle curve algebriche, si sono prese in considerazione anche le indicazioni relative a questo

---

<sup>4</sup>Ivi, p. 9.

<sup>5</sup>Si veda [13, p. 337].

<sup>6</sup>Ivi, p. 338.

<sup>7</sup>Ivi, pp. 338-339.

argomento, presente nel secondo biennio:<sup>8</sup>

*«Le sezioni coniche saranno studiate sia da un punto di vista geometrico sintetico che analitico. Inoltre, lo studente approfondirà la comprensione della specificità dei due approcci (sintetico e analitico) allo studio della geometria.»*

*«[Lo studente] studierà [...] la nozione di luogo geometrico, con alcuni esempi significativi. Lo studio della geometria proseguirà con l'estensione allo spazio di alcuni dei temi della geometria piana, anche al fine di sviluppare l'intuizione geometrica.»*

Altro aspetto considerato di particolare importanza è quello informatico:

*«Gli strumenti informatici oggi disponibili offrono contesti idonei per rappresentare e manipolare oggetti matematici. L'insegnamento della matematica offre numerose occasioni per acquisire familiarità con tali strumenti e per comprenderne il valore metodologico. Il percorso, quando ciò si rivelerà opportuno, favorirà l'uso di questi strumenti, anche in vista del loro uso per il trattamento dei dati nelle altre discipline scientifiche. L'uso degli strumenti informatici è una risorsa importante che sarà introdotta in modo critico, senza creare l'illusione che essa sia un mezzo automatico di risoluzione di problemi e senza compromettere la necessaria acquisizione di capacità di calcolo mentale.»<sup>9</sup>*

Tali aspetti presenti nelle Indicazioni Nazionali sono stati il punto di partenza per un ragionamento dal punto di vista didattico sulle figure geometriche. Emerge, infatti, l'importanza che lo studente possieda gli strumenti necessari per sviluppare un pensiero matematico, e la capacità di manipolare e utilizzare le figure geometriche appare fondamentale. Tuttavia, spesso emergono anche diverse difficoltà e il disegno induce lo studente all'errore. Tale problematicità è dovuta alla natura stessa della figura geometrica. Nella sezione successiva viene analizzato questo aspetto, cercando di spiegarne le motivazioni e proponendo elementi che aiutino gli studenti ad appropriarsi totalmente della figura geometrica e ad utilizzarla con criterio.

---

<sup>8</sup>Ivi, p. 340.

<sup>9</sup>Ivi, p. 338.



## 1.2 Dalla distinzione tra concetto e immagine ai concetti figurali

Nelle teorie cognitive, solitamente concetto e immagine sono categorie di entità mentali nettamente distinte. Come espresso da Fischbein nell'articolo [6], il concetto esprime un'idea, una rappresentazione ideale di una classe di oggetti basata su caratteristiche comuni, mentre l'immagine è la rappresentazione sensoriale di un oggetto. Nell'ambito geometrico, tuttavia, questa indipendenza non appare così ovvia. Prendiamo in considerazione, ad esempio, l'operazione geometrica che consiste nello staccare un triangolo isoscele definito dai vertici  $A$ ,  $B$  e  $C$  e rovesciarlo. Da una parte, stiamo lavorando su un piano ideale: gli oggetti a cui ci riferiamo (punti, triangoli...) sono concetti che vivono nel solo piano ideale. Dall'altra parte, tuttavia, le operazioni pratiche descritte precedentemente hanno una natura intrinsecamente figurale, attuabili solo se si considera il piano delle immagini. Le entità geometriche possiedono caratteristiche concettuali: l'assoluta perfezione può essere considerata solo in senso concettuale, senza avere corrispettivi materiali. Non si tratta di copie mentali di oggetti reali, ma rappresentazioni generali. Un altro aspetto fondamentale è il legame tra figura geometrica e definizione:

*«The properties of geometrical figures are imposed by, or derived from definitions in the realm of a certain axiomatic system. From this point of view, also, a geometrical figure has a conceptual nature. A square is not an image drawn on a sheet of paper. It is a shape controlled by its definition.»<sup>10</sup>*

Una figura geometrica, perciò, ha proprietà concettuali intrinseche, ma non è un mero concetto, in quanto preserva la sua spazialità.

*«Concepts do not turn, do not move, and images, as such, do not possess the perfection, the generalization, the abstractness, the purity which are supposed when performing the calculations.»<sup>11</sup>*

Fischbein va così a definire il **concetto figurale**: «The objects of investigation and manipulation in geometrical reasoning are then mental entities, called by us figural concepts, which reflect spatial properties (shape, position, magnitude), and at the same time, possess conceptual qualities -like ideality, abstractness, generality, perfection».<sup>12</sup> Nei concetti figurali aspetti concettuali e figurali sono fusi, permettendo così di formulare ragionamenti

<sup>10</sup>Si veda [6, p. 141].

<sup>11</sup>Ivi, pp. 141-142.

<sup>12</sup>Ivi, p. 143.

che presuppongono l'utilizzo di enti geometrici.

Il contrasto tra componente concettuale e figurale può generare difficoltà negli studenti: il rischio comune è che non sia chiara la distinzione tra disegno e definizione. La componente figurale tende a liberarsi dalla definizione formale: davanti ad un problema geometrico, gli studenti potrebbero essere portati a dimenticare gli aspetti formali e concentrarsi esclusivamente sull'immagine disegnata. È, dunque, fondamentale proporre attività che rendano necessaria l'attenzione e la ricerca della definizione, a volte in contrasto con conclusioni derivabili dallo studio della figura disegnata. L'utilizzo dei luoghi geometrici potrebbe aiutare, in quanto essi possiedono una doppia natura: il luogo è una figura in cui tutti i punti soddisfano una determinata proprietà e tutti i punti che corrispondono alla rispettiva proprietà appartengono alla rispettiva figura. Secondo Fischbein, «confronting figural impressions with formal constraints one helps to improve the conceptual control and, at the same time, one stimulates the symbiosis between the figural and the conceptual constraints».<sup>13</sup> Gli elementi figurali diventano parte integrante del processo logico. Prendiamo in considerazione, ad esempio, due curve che verranno analizzate nel progetto descritto nel Capitolo 3: la parabola, raffigurata in Figura 2.1 e la curva kappa, raffigurata in Figura 2.30. Inizialmente si approcciano le due curve senza conoscerne le definizioni come luoghi, ma osservandole mediante le macchine matematiche, strumenti fisici che permettono di realizzarne un disegno. Se la componente figurale si distacca totalmente dal controllo formale, lo studente può essere portato a confondere le due curve e non essere in grado di distinguerle. L'attività si pone dunque come obiettivo il superamento di tale approccio superficiale, per arrivare a chiedersi come si può identificare una curva: in questo modo dovrebbe apparire più chiaro che è la definizione a veicolare la figura, che è servita come punto di partenza per un processo logico e formale. Lo studente non può accontentarsi dell'approssimazione del disegno, ma deve utilizzarlo come mezzo per giungere alla formalizzazione. Come affermato da M. Mariotti nell'articolo [11], è necessario «uno sviluppo "armonico" dei concetti geometrici di modo che la componente figurale si mantenga in armonia con la componente concettuale, ossia facendo sì che nell'elaborazione di un ragionamento geometrico si possa disporre di immagini vivide e flessibili e di un controllo teorico adeguato - permettendo ad esempio di fronteggiare possibili interferenze di stereotipi».<sup>14</sup>

---

<sup>13</sup>Ivi, p. 157.

<sup>14</sup>Si veda [11, p. 138].

### 1.2.1 Manipolazione dell'oggetto geometrico

Per arrivare ad un controllo teorico dell'immagine, lo studente deve imparare a manipolare gli oggetti geometrici, ricorrendo contemporaneamente ad operazioni sulle figure e ad operazioni logiche. L'immagine viene così accompagnata da un pensiero analitico rigoroso. La manipolazione dell'oggetto permette di sviluppare diverse abilità:

- si migliorano le capacità di problem solving attraverso la cooperazione tra aspetti concettuali e figurali.
- Si impara a coordinare e lavorare con un maggior numero di concetti figurali.
- Si costruisce un processo mentale significativo suddividendo in ragionamento in sub-unità.
- Si sviluppa la capacità di prevedere le trasformazioni e i cambiamenti e di sfruttarli per giungere alla soluzione.

In tali attività, vi sono altri due aspetti da non sottovalutare: il ruolo dell'errore e la capacità di visualizzazione.

Spesso l'errore è visto in una connotazione negativa. In realtà non solo è utile, ma perfino necessario: il matematico non procede nelle sue riflessioni in maniera lineare, ma formula congetture, compie dei tentativi... Allo stesso modo anche lo studente deve avere la possibilità di esplorare. Come afferma il filosofo Karl Popper, «se non osiamo affrontare problemi che siano così difficili da rendere l'errore quasi inevitabile, non vi sarà allora sviluppo della conoscenza». Bisogna perciò proporre agli studenti problemi e non esercizi, attività che li obblighino all'esplorazione e alla scoperta, e non alla mera applicazione di conoscenze pregresse. L'errore deve divenire uno strumento di conoscenza. Attraverso questo, lo studente affina la capacità di ragionamento e impara a utilizzare la figura in modo costruttivo. L'errore non deve essere visto come una semplice "risposta sbagliata", ma, per lo studente, può diventare un indicatore di modalità di soluzione diverse e più adeguate. L'errore è il sintomo di un'evoluzione.

Lo studente, con il tempo, imparerà a sviluppare la capacità di vedere un'immagine: impara a percepire l'immagine, familiarizzando con il processo di generalizzazione, per cui la figura osservata diventa una rappresentazione del concetto generale. Secondo Mariotti, lo studente deve imparare ad «avvalersi dell'immagine in modo euristico».<sup>15</sup> È necessario educare gli studenti alla

---

<sup>15</sup>Ivi, p. 115.

visualizzazione, ovvero il processo di costruzione e trasformazione dell'immagine mentale, a cui far seguire un pensiero analitico rigoroso.

Nell'attività esposta nel Capitolo 3, le macchine matematiche vengono manipolate dagli studenti. Sebbene siano guidati da spunti formulati dal docente, essi sono liberi di procedere per tentativi. In questo modo li si spinge a sviluppare una maggiore capacità di osservazione e riflessione e a migliorare la capacità di controllo teorico sull'immagine.

### 1.2.2 Dal disegno reale all'oggetto virtuale

Sebbene ci sia un forte legame, è necessario che lo studente abbia chiara la netta distinzione tra lo spazio fisico e lo spazio geometrico, astratto ed ideale. Prendiamo in considerazione il disegno attraverso carta e penna, ovvero una traccia scritta su un foglio che rappresenta un oggetto geometrico. Lo studente deve avere chiaro che si tratta di un mezzo per rendere percepibile un concetto geometrico: il disegno assume una funzione semiotica. Il tracciato non è ideale e perfetto: bisogna tener conto di limiti esistenti che rendono il disegno una rappresentazione approssimata del concetto geometrico. Prendendo nuovamente in considerazione le macchine matematiche, esse possiedono vincoli e limiti: dalla difficoltà di movimento dovuto all'attrito tra i vari componenti, all'imprecisione del tratto della matita. Perciò, lo studente non può limitarsi ad utilizzare lo strumento, ma deve rendersi conto di tali limiti e giungere così ad un'astrazione delle proprietà caratterizzanti.

I vincoli che nascono dall'utilizzo di carta e penna sono numerosi: l'aspetto più limitante è la mancanza di dinamicità, ovvero la capacità di muovere e trasformare le immagini. Per ovviare a questo problema, sono disponibili diversi software di geometria dinamica, che, come sostenuto da E. Miragliotta nell'articolo [12], possono «favorire armonia tra le due componenti fondamentali dei concetti geometrici e delle loro rappresentazioni, la componente figurale e quella concettuale».<sup>16</sup> Uno dei software più importanti per la didattica è Geogebra. Lo spazio virtuale è costituito da uno schermo, da un ambiente software che permette di disegnare attraverso degli strumenti e una funzione che trasforma le immagini disegnate in modo tale che l'utente percepisca la sensazione di trascinare il disegno. La sensazione di movimento di tale funzione di trascinamento è dovuto alla relazione tra proprietà che variano e proprietà che non variano, dette appunto invarianti. Queste proprietà invarianti sono definite tramite i comandi per effettuare la costruzione di partenza, e permettono di riconoscere l'immagine disegnata come rap-

---

<sup>16</sup>Si veda [12, p. 342].

presentazione di un oggetto geometrico: attraverso il trascinamento si ha a disposizione una vasta gamma di esempi legati dalla definizione comune realizzata durante la costruzione. La generalità del concetto figurale è rappresentata più chiaramente da un ambiente di geometria dinamica (si veda [11]). Si può così costruire un'immagine mentale meno influenzabile da stereotipi e più flessibile.

Inoltre, gli invarianti possono anche essere costituiti dalle proprietà deducibili dalla costruzione. Le proprietà invarianti definite dalla costruzione sono dette dirette, mentre le proprietà che appaiono invarianti nel trascinamento senza essere state definite dalla costruzione sono dette indirette. La distinzione tra queste due proprietà corrisponde alla distinzione tra premesse e conseguenze. Si sviluppa una gerarchia logica indotta dalla costruzione.

Questi software, e in particolare Geogebra, possiedono inoltre altre caratteristiche interessanti e utili per lo sviluppo di un pensiero matematico:

- L'affiancamento di diverse viste. Geogebra possiede tre ambienti, detti viste, interconnessi tra loro: la vista Algebra, la vista Grafica e la vista Foglio di calcolo. La possibilità di vedere lo stesso oggetto sotto diversi registri permette di manipolare diverse rappresentazioni semiotiche per arrivare a costruire il concetto matematico
- Oggetti dipendenti e indipendenti. Attraverso la distinzione tra oggetti liberi, ovvero che si possono muovere liberamente, e oggetti dipendenti, ovvero definiti a partire da oggetti preesistenti, gli studenti imparano a porre condizioni nella costruzione di un oggetto geometrico.
- Riduzione di vincoli fisici. Un ambiente di geometria dinamica offre un ausilio più sofisticato, in quanto non bisogna preoccuparsi di limitazioni fisiche (imprecisione del tratto, imperfezione degli strumenti, limitazioni di movimento...), che portano inevitabilmente ad approssimazioni. Imprecisioni presenti anche nel software sono solitamente invisibili all'occhio umano o poco percepibili.
- Animazioni. Tramite il software è possibile studiare l'evoluzione del modello costruito.

Attraverso Geogebra, lo studente riesce a comprendere con più chiarezza la differenza tra disegno e figura geometrica, dotata di determinate proprietà. Prendiamo, ad esempio, l'attività seguente, riguardante lo studio dei triangoli rettangoli, pensata per il biennio di una scuola secondaria di secondo grado.<sup>17</sup>

---

<sup>17</sup>Si veda [1, pp. 30-32].

1. Aperta la Vista Grafici con la griglia e la Vista Algebra, disegnare un triangolo rettangolo aiutandosi con la griglia. Cosa succede se si prova a trascinare uno dei vertici? Si tratta di un triangolo rettangolo?
2. Disegnare il triangolo rettangolo attraverso i seguenti comandi:
  - Tracciare un segmento passante per i punti  $E$  e  $D$ .
  - Tracciare la retta perpendicolare a  $ED$  passante per  $D$ .
  - Tracciare un punto  $F$  sulla retta.
  - Unire i punti  $E$ ,  $D$  ed  $F$ .

Cosa succede se si prova a trascinare ognuno dei vertici? La figura rimane un triangolo rettangolo?

Nella prima parte di attività, come rappresentato nelle Figure 1.1 e 1.2, si osserva che, spostando i vertici, il triangolo non è rettangolo. Abbiamo fissato i punti in modo che non fossero vincolati tra loro, ma fossero liberi di muoversi a piacere. Non abbiamo dato una regola precisa affinché il disegno rappresentasse sempre un triangolo rettangolo.

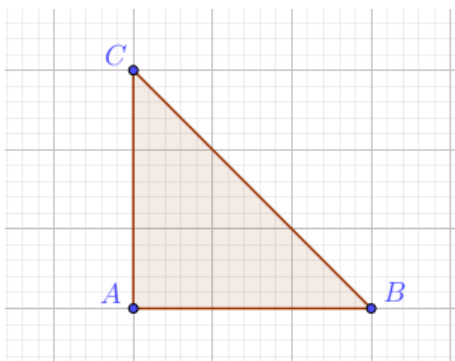


Figura 1.1

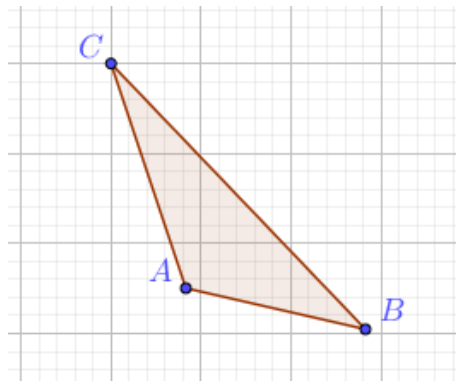


Figura 1.2

Nella seconda parte, invece, come si vede nelle Figure 1.3, 1.4 e 1.5, le condizioni imposte fanno sì che, anche spostando i vertici, il triangolo rimanga rettangolo. Abbiamo vincolato, infatti, il punto  $F$  in modo tale che giaccia sempre sulla retta perpendicolare ad  $ED$ . Non abbiamo semplicemente disegnato il triangolo, ma lo abbiamo costruito seguendone le proprietà caratteristiche. Attraverso questa attività, lo studente inizia a prendere familiarità con oggetti liberi e oggetti indipendenti, e può cogliere la differenza tra figure che sembrano possedere visivamente alcune caratteristiche e altre che le possiedono effettivamente perché imposte.

Si coglie, così, con più chiarezza la definizione di concetto figurale: la componente figurale e quella concettuale sono strettamente legate tra loro nella figura geometrica: trascinando la figura, si mantiene la proprietà caratteristica.

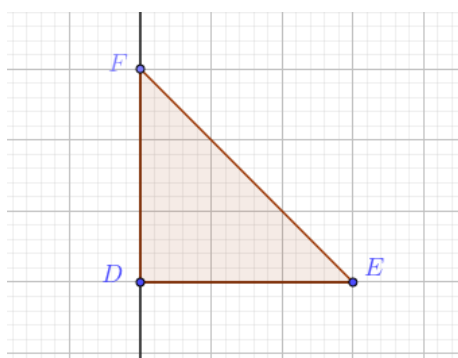


Figura 1.3

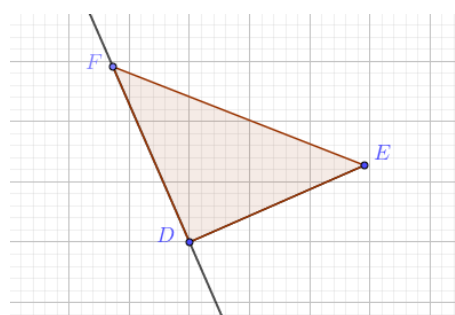


Figura 1.4

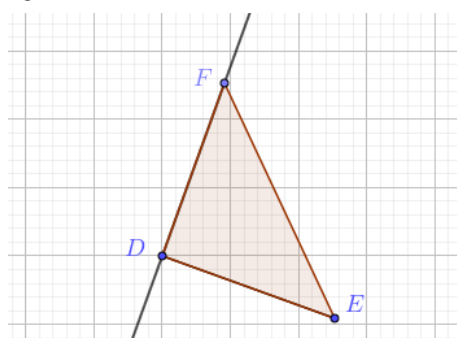


Figura 1.5

Appare quindi chiaro che lo sviluppo di un ragionamento matematico, obiettivo fondamentale per lo studente come emerge dalle Indicazioni Nazionali, deve essere accompagnato da uno studio approfondito delle figure geometriche, permettendo uno sviluppo nella capacità di manipolazione ed osservazione.

A fronte di queste analisi, si è deciso di progettare un'attività per studenti di scuole secondarie di secondo grado sulle curve in cui fosse presente l'uso di macchine matematiche e di software di geometria dinamica. Tale percorso viene descritto nel Capitolo 3 e analizzato nel Capitolo 4. Inoltre, siccome le macchine matematiche veicolano una riflessione storica sulle curve, il Capitolo 2 verrà dedicato ad un'analisi storica delle curve, con particolare riguardo alle curve algebriche.

## Capitolo 2

# Le curve algebriche nella storia

In questo capitolo si analizzeranno le curve piane seguendo un approccio storico. Si inizierà descrivendo gli studi dei matematici greci su coniche e altri tipi di curve usate per risolvere alcuni problemi classici dell'antichità. Si proseguirà descrivendo gli studi affrontati durante il Rinascimento, periodo in cui si riscopre un nuovo interesse verso l'argomento; in particolare ci si soffermerà sugli studi di Descartes.

In seguito si analizzeranno nuovamente le coniche seguendo l'approccio di Newton e si introdurranno le curve trascendenti legate agli studi di Leibniz. Infine, si esporrà l'approccio di Desargues e Pascal, che osservano le coniche secondo gli studi di prospettiva, per concludere con i contributi di Plücker.

La teoria delle curve si pone come obiettivo la descrizione e l'analisi della traccia di un oggetto che si muove nello spazio nel corso del tempo. Prima di vedere l'evoluzione storica del concetto di curva, riportiamo la definizione moderna concentrandoci, in particolare, sulle curve piane.

**Definizione 1.** *Una curva piana è l'immagine di una funzione continua*

$$\begin{aligned}\varphi : I &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \varphi(t) = (x_1(t), x_2(t))\end{aligned}$$

con  $I \subset \mathbb{R}$  intervallo.

**Definizione 2.** *Un sottoinsieme  $C \subset \mathbb{R}^2$  è una curva algebrica affine se esiste un polinomio  $f \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$  tale che  $\deg f \geq 1$  e*

$$C = V(f) = \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 : f(X_1, X_2) = 0\}.$$

**Definizione 3.** *Una curva trascendente è una curva non algebrica.*



## 2.1 Le curve nell'antica Grecia

Le definizioni sopra riportate sono il frutto di uno studio approfondito nel corso dei secoli.

Le prime curve studiate sono state il cerchio e la retta, la cui conoscenza aveva scopi pratici legati alla costruzione di edifici e alla misura dei campi. Si andarono così a costruire le primissime macchine matematiche, la riga e il compasso. Molti problemi matematici erano risolvibili grazie all'uso di questi due strumenti.

Tuttavia, sebbene fosse chiara l'idea di retta, si riscontrarono non poche difficoltà legate alla formalizzazione della sua definizione. Euclide (IV secolo a.C.) propose come definizione la seguente:

*La linea retta è quella che giace egualmente rispetto a tutti i propri punti*

presente in *Elementi, Libro I, def IV* ed arricchita dai due postulati presenti nello stesso libro:

1. Si può condurre una linea retta da qualsiasi punto ad ogni altro punto.
2. Una retta terminata si può prolungare continuamente in linea retta.

Una nuova definizione venne, in seguito, proposta da Archimede nel Libro I de *Sopra la sfera e il cilindro*:

*La retta segna il minimo cammino tra due punti*

che però venne presentato come un assioma.

La definizione di circonferenza risultò meno problematica. Nella definizione XV del Libro I degli Elementi il cerchio veniva descritto nel modo seguente:

*Il cerchio è una figura piana delimitata da un'unica linea tale che tutte le rette che terminano su di essa a partire da un medesimo punto fra quelli interni alla figura siano uguali fra loro.*

Euclide riteneva effettivamente esistente una figura solo se fosse tracciabile con riga e compasso, come se il matematico fosse un disegnatore. Egli non andò mai a definire formalmente il significato di figura tracciabile, ma andando ad analizzare l'uso che applica all'interno degli Elementi, si potrebbe formalizzare nel modo seguente.

**Definizione 4.** *Sia  $E$  un insieme finito di punti del piano, contenente almeno due punti distinti. Si dice che una figura  $F$  è **tracciabile in un sol passo con riga e compasso** da  $E$  se è una delle seguenti figure:*

- $F$  è una retta per due punti distinti di  $E$
- $F$  è una circonferenza di centro un punto di  $E$  e passante per un altro punto di  $E$ .

**Definizione 5.** Siano  $A, B$  due punti distinti del piano. Si dice che un punto  $P$  del piano è un **punto costruibile** da  $A, B$  quando esistono punti del piano  $P_1, \dots, P_{n-1}, P_n = P$  per cui  $P_j$  è in un'intersezione di figure tracciabili in un sol passo con riga e compasso a partire da  $A, B, P_1, \dots, P_{j-1}$ , per ogni  $j = 1, \dots, n$ .

**Definizione 6.** Una figura è **tracciabile** con riga e compasso a partire da  $A, B$  quando è l'unione di cerchi o rette ottenibili con un sol passo da punti costruibili a partire da  $A, B$ .

### 2.1.1 I problemi classici dell'antichità

Lo studio di curve più complesse della retta e della circonferenza si sviluppò grazie ai tentativi di risolvere i problemi classici dell'antichità:

1. La trisezione dell'angolo: è possibile tagliare in tre parti uguali un angolo qualsiasi?
2. La quadratura del cerchio: è possibile costruire un quadrato la cui area è uguale a quella di un cerchio qualsiasi?
3. La duplicazione del cubo, detto problema di Deli: è possibile costruire un cubo di volume doppio rispetto a quello dato?

Come venne dimostrato diversi secoli dopo, tali problemi non sono risolvibili mediante riga e compasso. Infatti, per quanto riguarda la trisezione dell'angolo, dato  $\alpha = 3\beta$ , risulta  $\sin 3\beta = 3 \sin \beta - 4 \sin^3 \beta$ , da cui  $4x^3 - 3x + c = 0$ . Dalla teoria sviluppata da Evariste Galois (1811-1832), risulta che una soluzione per  $c$  arbitrario non può essere trovata mediante riga e compasso. Analogamente, la duplicazione del cubo porta a risolvere  $x^3 - 2 = 0$  che, nuovamente per la teoria di Galois, non può essere risolta mediante costruzione con riga e compasso. Infine, l'impossibilità della quadratura del cerchio venne provata rigorosamente nel 1882, poiché si osservò che essa consiste nella determinazione del valore  $\pi$ , che Lindemann (1852-1939) provò essere un numero trascendente.

I greci, non riuscendo a risolvere tali problemi mediante riga e compasso, cercarono soluzioni alternative, trovando così curve più complesse della retta e del cerchio.

## Le coniche

In particolare, la scoperta delle sezioni coniche si attribuisce a Menecmo, attorno al 350 a.C.. In seguito, è grazie ad Apollonio di Perga che si ottenne un'esposizione formale della teoria delle sezioni coniche, nell'opera *Le Coniche* risalente al 225 a.C.. Esse erano definite intersezioni di coni con piani. Apollonio, inoltre, le caratterizzava mediante proprietà che, al giorno d'oggi, si esprimono mediante l'equazione  $y^2 = px + qx^2$ , con

- $q = 0$  che individua una parabola
- $q > 0$  che individua un'iperbole
- $q < 0$  che individua un'ellisse.

Inoltre, i greci conoscevano la definizione delle coniche come luoghi geometrici:

**Definizione 7.** 1. *La parabola è il luogo dei punti del piano che hanno uguale distanza da un punto  $P$  dato ed una retta  $r$  data.*

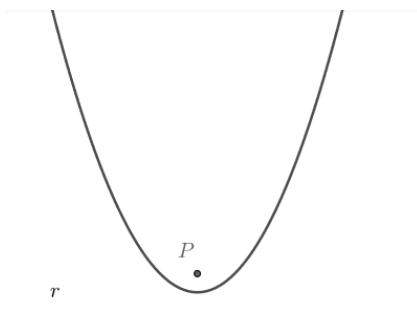


Figura 2.1: Parabola.

2. *L'ellisse è il luogo dei punti del piano la cui somma delle distanze da due punti dati  $P_1$  e  $P_2$  è costante.*
3. *L'iperbole è il luogo dei punti del piano la cui differenza delle distanze da due punti dati  $P_1$  e  $P_2$  è costante.*

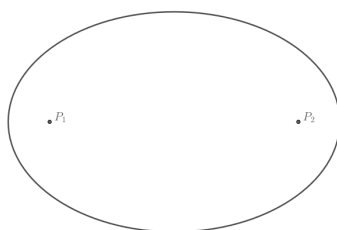


Figura 2.2: Ellisse.

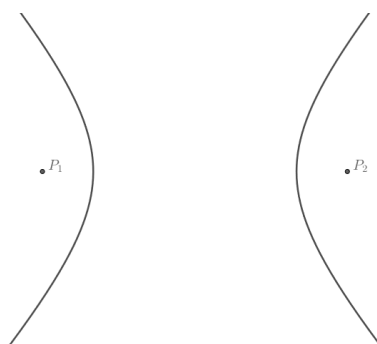


Figura 2.3: Iperbole.

Tramite le coniche si riescono a risolvere due problemi classici. La duplicazione del cubo si risolve mediante l'intersezione delle due parabole:

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ x^2 = y \end{cases}$$

da cui risulta  $2x = x^4$ , che ha come soluzioni  $x = 0$  e  $x = \sqrt[3]{2}$ .

La trisezione dell'angolo venne risolta da Pappo nel trattato *Collezione matematica*, risalente al 320 d.C..

Come rappresentato in Figura 2.4, fissato un segmento  $AB$ , si determina il luogo dei punti  $P$  tale che

$$2\hat{P}AB = \hat{P}BA.$$

Esso risulta un'iperbole di eccentricità 2, con fuoco in  $B$  e retta direttrice che corrisponde all'asse del segmento  $AB$ . Per dimostrarlo, consideriamo il trapezio formato dai vertici  $A$ ,  $B$ ,  $P$  e  $P'$  punto simmetrico a  $P$  rispetto all'asse del segmento  $AB$ , come rappresentato in Figura 2.5. Esso risulta isoscele, perciò i triangoli  $ABP'$  e  $ABP$  sono congruenti per il secondo criterio. Inoltre, il segmento  $AP$  risulta la bisettrice dell'angolo  $P'\hat{A}B$  per costruzione,

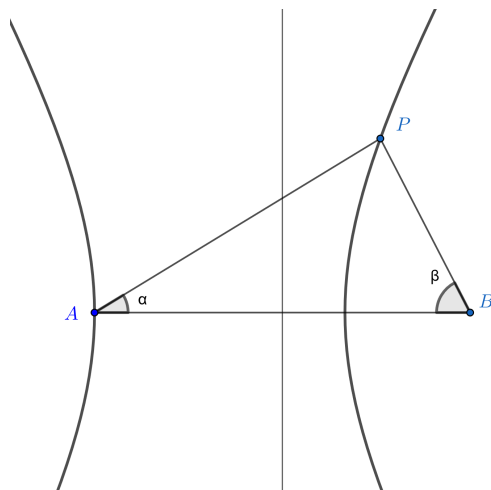


Figura 2.4

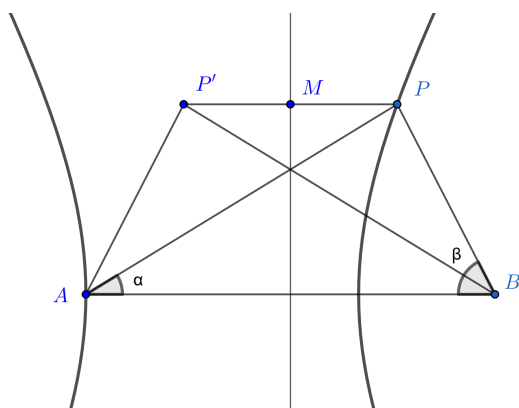


Figura 2.5

perciò osserviamo che

$$P\hat{A}P' \cong P\hat{A}B \cong A\hat{P}P'.$$

Dunque, il triangolo  $APP'$  è isoscele, per cui  $AP' \cong PP'$ . Preso  $M$  punto medio del segmento  $PP'$ , che giace sull'asse di  $AB$ , risulta

$$PM = \frac{1}{2}AP'.$$

Ricordando che  $AP' \cong BP$ , possiamo sfruttare l'equazione polare dell'iperbole, concludendo che

$$\frac{PB}{PM} = \frac{PB}{\frac{1}{2}PB} = 2.$$

Dimostrato ciò, disegniamo un cerchio che passi per  $A$ , per  $B$  e per  $P$ , come rappresentato in Figura 2.6. Indichiamo il centro del cerchio con  $O$ , che

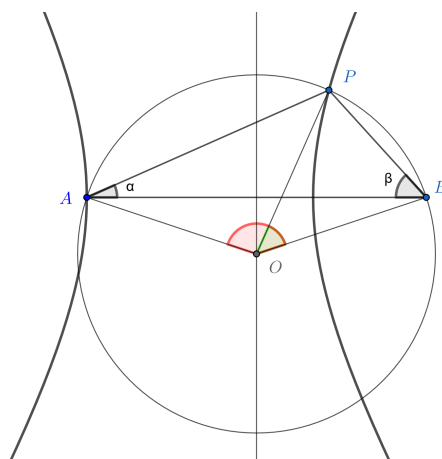


Figura 2.6

si trova sull'asse del segmento  $AB$ . Siccome l'angolo al centro è il doppio dell'angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco, risulta  $2P\hat{A}B = P\hat{O}B$  dato che entrambi insistono sull'arco  $PB$ , e  $2P\hat{B}A = P\hat{O}A$  dato che entrambi insistono sull'arco  $PA$ . Da queste relazioni si può concludere che

$$2P\hat{O}B = P\hat{O}A$$

ovvero  $P\hat{O}B$  è la terza parte dell'angolo  $A\hat{O}B$ .

## La cissoide di Diocle

I greci, oltre alle coniche, scoprirono altre curve che permettono la risoluzione dei problemi descritti precedentemente. Nel II sec. a.C, il matematico Diocle studiò la cissoide per risolvere il problema della duplicazione del cubo.

**Definizione 8.** Sia data una circonferenza  $\Gamma$  e un punto  $A'$  su di essa. Sia  $t$  la tangente a  $C$  passante per  $A'$  e  $A$  l'estremo opposto ad  $A'$  del diametro passante per  $A'$ . Per ogni retta  $s$  passante per  $A$  sia  $Q_1$  il punto di incontro con la circonferenza e  $Q_2$  il punto d'incontro con la tangente  $t$ . Al variare della retta  $s$  la **cissoide di Diocle** è il luogo dei punti  $P \in s$  tali che

$$AP = Q_1Q_2.$$

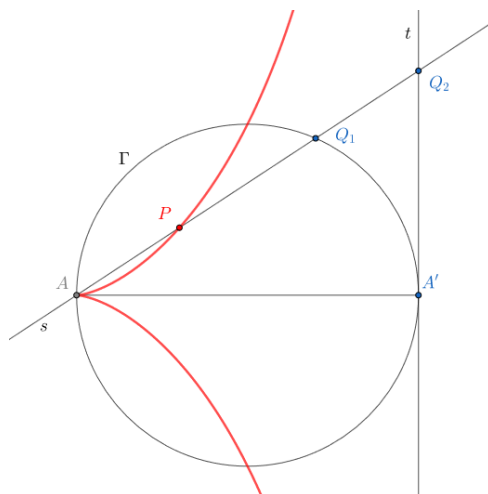


Figura 2.7: Cissoide di Diocle.

Il nome "cissoide" deriva dal greco *κισσοειδής* (kissoides) che significa "foglia d'edera" e venne usato a partire dal diciassettesimo secolo. Per risolvere il problema di Deli, Diocle costruì la cissoide nel modo seguente.

Come rappresentato in Figura 2.8, siano date due rette perpendicolari  $r$  ed  $s$  che si incontrano nel punto  $O$ . Costruiamo una circonferenza di centro  $O$  e raggio arbitrario, e siano  $A$  e  $A'$ ,  $A''$  e  $A'''$  rispettivamente punti di intersezione della circonferenza con  $r$  e con  $s$ . Costruiamo due rette  $t$  e  $t'$  parallele alla retta  $s$  equidistanti da essa; esse incontrano la retta  $r$  rispettivamente in  $B$  e  $B'$ . Indichiamo le intersezioni delle rette parallele ad  $s$  con la circonferenza con  $C, C', C'', C'''$ . La retta che passa per  $A$  e  $C'$  taglia la parallela  $t$  nel punto  $P$ . Al variare della retta  $t'$  e dunque del punto  $C'$ , il punto  $P$  individua la cissoide di Diocle.

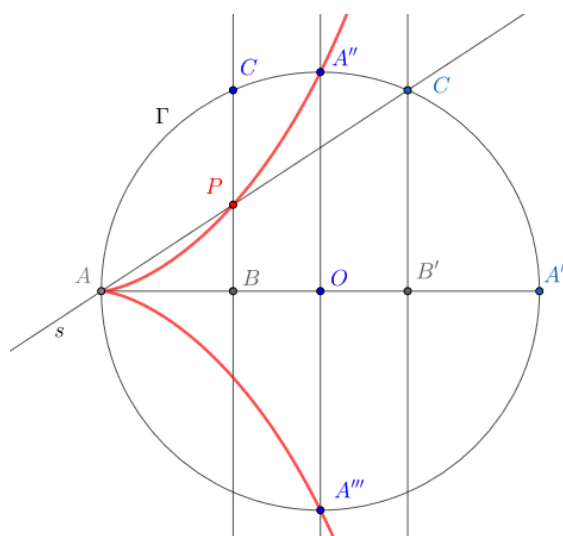


Figura 2.8: Duplicazione del cubo tramite cissoide di Diocle.

Individuiamo ora il punto medio  $M$  del segmento  $OA''$ . Sia  $P$  il punto di intersezione tra la cissoide e la retta  $A''M$ . Osserviamo che i triangoli  $PBA'$  e  $MOA'$  sono simili per il primo criterio. Perciò, indicando con  $x = A'B$ ,  $y = BC$ ,  $z = AB$ , otteniamo

$$\frac{A'B}{PB} = \frac{A'O}{OM} = 2.$$

Inoltre, i triangoli  $AB'C'$  e  $ABP$  sono simili per il primo criterio e, siccome il triangolo  $ACA'$  è retto in quanto inscritto in una semicirconferenza, i triangoli  $ACB$  e  $CBA'$  sono simili, da cui

$$\frac{A'B}{BC} = \frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'} = \frac{AB'}{B'C'} = \frac{AB}{PB}.$$

Da questa relazione si ottiene

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{\frac{1}{2}x}$$

da cui

$$x = \frac{2z^2}{y}$$

$$z = \frac{y^2}{x}$$



e si può concludere che  $x^3 = 2y^3$ .

## La concoide di Nicomede

Altra curva che risolve sia il problema di Deli sia la trisezione dell'angolo è la concoide di Nicomede, che fu scoperta dall'omonimo matematico nel 180 a.C circa e venne utilizzata anche per la costruzione di sezioni verticali di colonne. Il nome deriva dal greco  $\kappa\acute{o}\gamma\chi\eta$  (konche), che significa conchiglia.

**Definizione 9.** Sia  $r$  una retta ed  $O$  un punto non appartenente ad essa, detto polo, a distanza  $d$ . Indicata con  $s$  una retta passante per  $O$  che interseca la retta  $r$  in un punto qualsiasi  $Q$ , si dice **concoide di Nicomede** il luogo geometrico dei punti  $P \in s$  tali che

$$PQ = k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Come si osserva in Figura 2.9, 2.10 e 2.11, la forma dipende dalla relazione tra  $k$  e  $d$ .

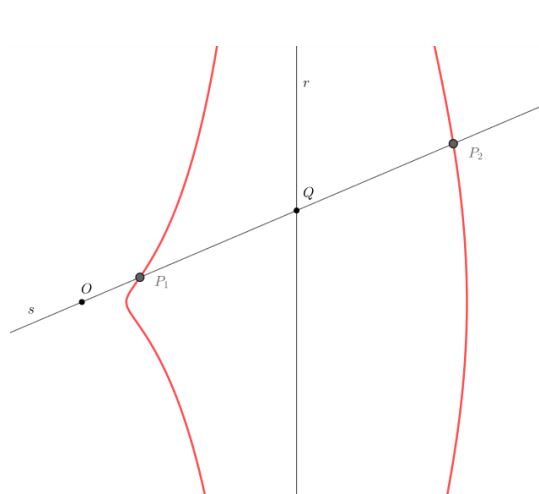


Figura 2.9: Concoide con  $k < d$ .

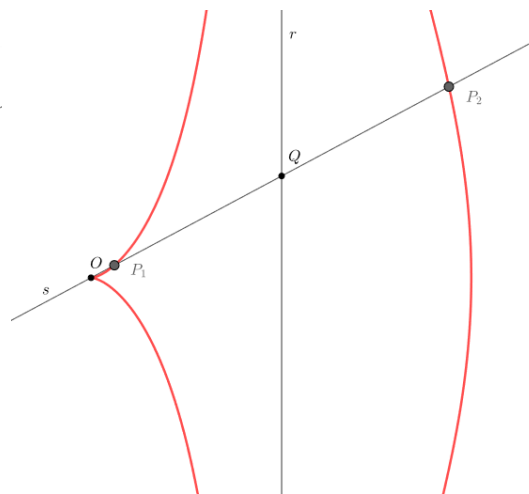


Figura 2.10: Concoide con  $k = d$ .

Per risolvere la trisezione dell'angolo, si procede nel modo seguente.

Come rappresentato nella Figura 2.12, sia  $B$  il punto di intersezione tra la retta  $r$  e la retta perpendicolare passante per  $O$ . Sia  $\hat{Q}OB$  l'angolo  $\alpha$ . Tracciamo la concoide per  $r$  e  $O$  tale che

$$k = 2OA.$$

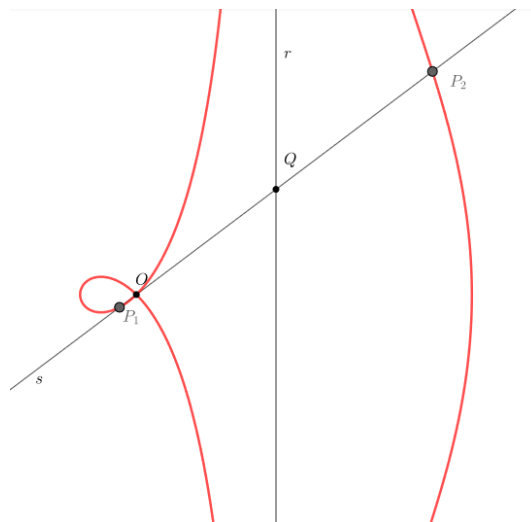
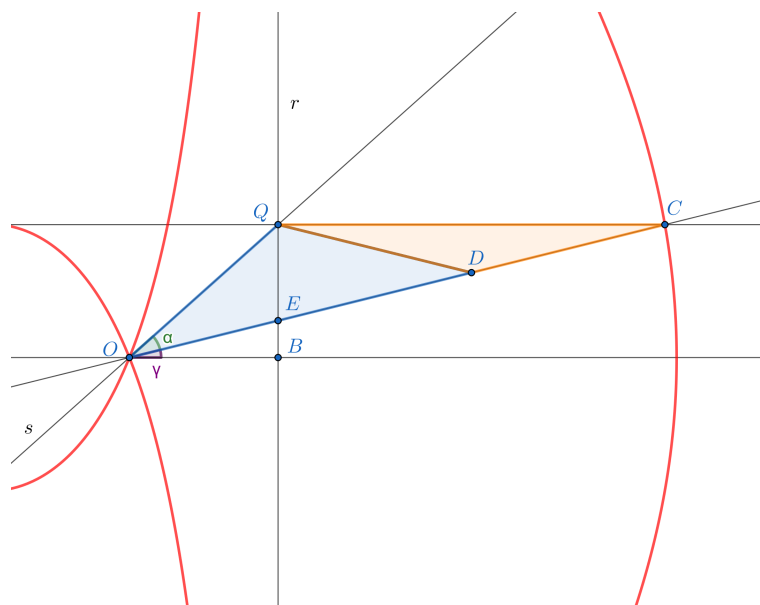
Figura 2.11: Concoide con  $k > d$ .

Figura 2.12: Soluzione della trisezione dell'angolo mediante concoide di Nicomede.

La retta parallela ad  $OB$  passante per  $Q$  taglia la concoide nel punto  $C$ . Indichiamo con  $\gamma$  l'angolo  $B\hat{O}C$ .

Sia ora  $E$  l'intersezione del segmento  $QB$  con il segmento  $CO$  e  $D$  il punto medio del segmento  $CE$ . Sapendo che  $QD$  è la mediana relativa all'ipotenusa  $CE$  del triangolo rettangolo  $QEC$  e il segmento  $CE$  è il doppio del segmento  $QO$  per costruzione della concoide, osserviamo che

$$QD \cong QO.$$

Perciò il triangolo  $ODQ$  è isoscele, da cui

$$Q\hat{D}O \cong Q\hat{O}D.$$

Analogamente, il triangolo  $QDC$  è isoscele, da cui

$$D\hat{Q}C \cong Q\hat{C}D \cong \gamma.$$

Dunque,  $Q\hat{D}O = 2\gamma$ , da cui possiamo concludere che

$$\alpha = Q\hat{O}D + \gamma = 3\gamma.$$

Mediante la concoide si può risolvere anche il problema di Deli. Siano  $AB$  e  $AD$  due segmenti perpendicolari tra loro. In particolare, poniamo  $AB = 2d$  e  $AD = 2k$ . Costruiamo ora il rettangolo avente per due lati i segmenti fissati e chiamiamo il quarto vertice  $C$ . Chiamiamo  $E$  il punto medio del segmento  $AD$ , e prolunghiamo il segmento  $CE$  fino ad incontrare in  $F$  nel prolungamento di  $AB$ . Sia  $G$  il punto medio del segmento  $AB$  e tracciamo la perpendicolare ad  $AB$  passante per  $G$ . Costruiamo ora il cerchio con centro in  $B$  e raggio uguale a  $k$ . Esso taglia la suddetta perpendicolare nel punto  $H$ , situato al di fuori del rettangolo  $ABCD$ . Uniamo  $H$  con  $F$  e costruiamo la retta parallela a  $HF$  passante per  $B$ . La concoide che prendiamo in considerazione ha come retta  $r$  quella appena costruita, come polo il punto  $H$  e come distanza costante il valore  $k$ . Tale concoide incontra la retta  $AB$  nel punto  $K$ . Inoltre, la retta  $r$  e la retta  $AB$  individuano su  $HK$  il segmento  $MK$ .

Sia  $BK = x$ . Osserviamo che valgono le seguenti uguaglianze:

$$HG = \sqrt{b^2 - a^2}$$

$$GK = a + x.$$

da cui segue che

$$HK = \sqrt{HG^2 + GK^2} = \sqrt{b^2 - a^2 + (a+x)^2} = \sqrt{b^2 + 2ax + x^2}.$$

Per il primo criterio i triangoli  $BMK$  e  $FHK$  sono simili, perciò

$$FK : BK = HK : MK$$

da cui

$$\frac{4a+x}{x} = \frac{\sqrt{b^2 + 2ax + x^2}}{b}.$$

Elevando al quadrato entrambi i membri, otteniamo

$$\frac{(4a+x)^2}{x^2} = \frac{b^2 + 2ax + x^2}{b^2}$$

$$16a^2b^2 + 8ab^2x + b^2x^2 = b^2x^2 + 2ax^3 + x^4$$

$$x^4 + 2ax^3 - 8ab^2x - 16a^2b^2 = 0$$

$$x^3(x+2a) - 8ab^2(x+2a) = 0$$

$$(x^3 - 8ab^2)(x+2a) = 0.$$

Siccome  $x+2a \neq 0$ , necessariamente deve accadere

$$x^3 - 8ab^2 = 0$$

$$x^3 = 8ab^2.$$

Sia ora  $L$  il punto di intersezione della retta  $CK$  con la retta  $AD$ . I triangoli  $LDC$  e  $BCK$  sono simili. Di conseguenza, ponendo  $DL = y$ , si ha

$$2a : y = x : 2b$$

da cui

$$xy = 4ab$$

$$y = \frac{4ab}{x}.$$

Eleviamo al cubo entrambi i membri:

$$y^3 = \frac{64a^3b^3}{x^3}$$

$$y^3 = \frac{64a^3b^3}{8ab^2}$$

$$y^3 = 8a^2b.$$

Si arriva così ad avere il seguente sistema

$$\begin{cases} xy = 4ab \\ x^3 = 8ab^2 \\ y^3 = 8a^2b. \end{cases}$$

Andandolo a risolvere, ricaviamo

$$\frac{y^2}{x} = 2a$$

$$\frac{x^2}{y} = 2b$$

$$\frac{2a}{y} = \frac{y}{x} = \frac{x}{2b}$$

da cui

$$\frac{y^4}{4a^2} = 2by$$

$$y^3 = 8a^2b.$$

Se  $a^2b = 1$ , estraendo la radice cubica otteniamo

$$y = \sqrt[3]{2}.$$

## Altre curve

I matematici greci scoprirono anche altri tipi di curve che vennero poi studiate più attentamente durante il Rinascimento.

Riprendendo il ragionamento di Menecmo sulla costruzione della parabola, dell'ellisse e dell'iperbole, intorno al 150 a.C il matematico greco Perseo tagliò un toro, una superficie di rotazione generata dalla rotazione di una circonferenza intorno a una retta complanare (cioè appartenente al suo piano) ed esterna a essa, con un piano parallelo all'asse di rotazione. Tali curve sono chiamate **sezioni spiriche di Perseo**, dal momento che i greci chiamavano il toro  $\sigma\pi\epsilon\tilde{\iota}\rho\alpha$  (speira). Tali curve verranno riprese attorno al XVII secolo per studiare le curve di Cassini, che tratteremo nella Sezione 2.3.

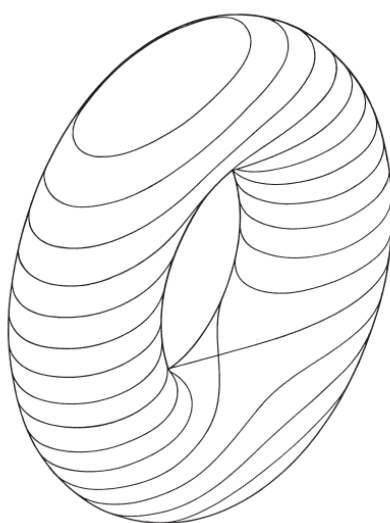


Figura 2.13: Sezioni spiriche di Perseo [2, p. 17].

Gli astronomi Ipparco, II sec. a.C., e Ptolema, II sec. d.C, studiarono delle curve per descrivere il cammino percorso dai pianeti, dette **epicicli**. Tali curve si ottengono tramite il cammino di un punto su un cerchio che ruota attorno al suo centro con velocità angolare costante, mentre il centro ruota attorno a un altro cerchio a velocità angolare costante. Tali curve vennero poi approssimate nuovamente durante il Rinascimento con lo studio delle curve dette rullette, che tratteremo nella Sezione 2.2.2.

## 2.2 Le curve nel Rinascimento

La teoria delle curve tornò ad avere importanza nel mondo matematico durante il Rinascimento per due motivi principali. Da una parte, vi fu la scoperta, da parte di Keplero, del fatto che le traiettorie descritte dai pianeti del sistema solare sono ellissi avente il sole come uno dei due fuochi; dall'altra,

si sviluppò la geometria analitica, che portò ad approcciare le curve da un punto di vista analitico.

### 2.2.1 La Géométrie di Descartes

L'opera più importante di Descartes è *La Géométrie*, pubblicata nel 1637, appendice di *Discorso sul metodo*. Il saggio è suddiviso in tre libri:

- Libro I: Problemi che si possono costruire usando soltanto cerchi e linee rette.
- Libro II: Sulla natura delle linee curve.
- Libro III: Sulla costruzione dei problemi solidi e soprassolidi.

Già dalla suddivisione dei libri si può intuire come in Descartes la costruzione delle curve rappresentasse un argomento di studio fondamentale.

All'interno del secondo libro è presente una critica alla classificazione delle curve che facevano gli antichi: essi classificavano le curve in due classi, le curve geometriche, che potevano essere costruite attraverso riga e compasso, e le curve meccaniche. Descartes non si trovava d'accordo con questa suddivisione affermando:

*«Se le curve meccaniche non appartengono alla geometria perché per la loro costruzione necessitano di strumenti, allora anche la retta e il cerchio dovrebbero essere bandite dalla geometria perché anch'esse, per essere costruite, richiedono l'uso di strumenti (riga e compasso); se invece si dice che non appartengono alla geometria perché necessitano di strumenti più complessi della riga e del compasso, allora tali curve andrebbero bandite dalla meccanica, dove si richiede la perfezione dell'esecuzione non dalla geometria, in cui si richiede l'esattezza del ragionamento.»<sup>1</sup>*

Andò così a generalizzare la nozione di luogo geometrico, affermando che «non c'è bisogno [...] di supporre niente altro che due o più linee possono essere mosse l'una sull'altra e che le loro intersezioni determinino curve».<sup>2</sup> Nacque così un nuovo strumento matematico per la realizzazione di curve, di cui si può osservare un disegno in Figura 2.14: il compasso a squadre scorrevoli. Esso si costruisce nel modo seguente:

<sup>1</sup>Traduzione di [4, pp. 315-316].

<sup>2</sup>Traduzione di [4], presa da [9, p. 168].

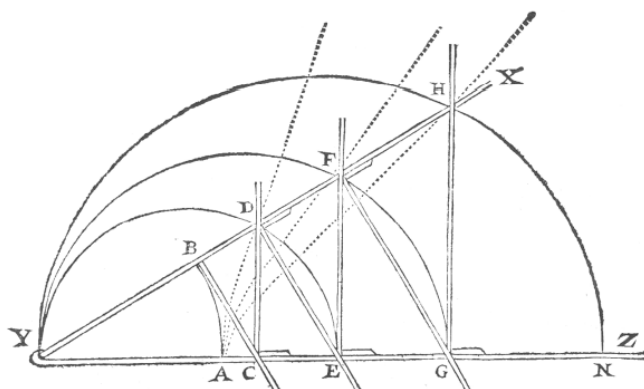


Figura 2.14: Compasso a squadre scorrevoli [4, p. 318].

Sia  $Y$  un perno fisso attorno a cui ruota un braccio  $YX$ , inizialmente sovrapposto al braccio  $YZ$ . Su queste due braccia possono scorrere delle squadre ad angolo retto costruite in modo tale che nella posizione di partenza esse siano sovrapposte tra loro e i punti  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $G$  e  $H$  siano nel punto  $A$ . Al ruotare di  $YX$ , le righe scorrono: i punti  $D$ ,  $F$  ed  $H$  tracciano curve di grado maggiore di due, il punto  $B$  traccia un cerchio di raggio  $YB$  e centro  $Y$ .

Rifiutando la classificazione degli antichi, Descartes considerava come curve geometriche tutte le curve algebriche. Introdusse il genere di una curva, soffermandosi più sul metodo di costruzione della curva che non sul grado dell'equazione corrispondente. Più precisamente «le curve i cui punti vengono disegnati risolvendo equazioni di grado  $2n - 1$  o  $2n$  sono di genere  $n$ , in quanto in ambedue i casi le soluzioni si ottengono intersecando una circonferenza con una curva di grado  $n$ .»<sup>3</sup> In particolare:

1. Primo genere: la costruzione avviene tramite riga e compasso. Corrisponde a curve di grado minore di tre.
2. Secondo genere: la costruzione necessita almeno di una sezione conica. Corrisponde a curve di terzo e quarto grado.
3. Terzo genere: la costruzione necessita almeno di una curva di terzo grado. Corrisponde a curve di quinto e sesto grado.
4.  $n$ -esimo genere: la costruzione necessita almeno di una curva di grado  $n$ . Corrisponde a curve di grado  $2n - 1$  e  $2n$ .

<sup>3</sup>Si veda [9, p. 173].



## Lo studio delle tangenti ad una curva

Un altro tema di particolare importanza riportato nella *Géométrie* e ripreso da Fermat è la determinazione della tangente di una curva passante per un punto. Tale problema appare come un problema geometrico, esatto e perfettamente calcolabile. Questo approccio affascinò i matematici contemporanei a Descartes e favorì ampi dibattiti scientifici.

Descartes ridusse il problema alla determinazione della normale al punto della curva data, dal momento che essa è perpendicolare alla tangente. Inoltre, la normale passa per il diametro del cerchio tangente nel punto considerato: di conseguenza, se si trova il punto  $Y$  che corrisponde al centro del cerchio cercato, abbiamo risolto il problema. In particolare, scelse come circonferenza quella che ha centro su uno degli assi di riferimento, ad esempio l'asse delle  $y$ , come rappresentato in Figura 2.15.

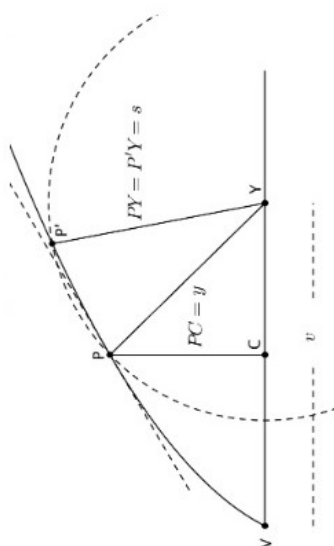


Figura 2.15: Studio delle tangenti ad una curva.<sup>4</sup>

Sia ora  $Y$  il centro del cerchio, che ha coordinate  $(0, v)$ ; l'equazione del cerchio risulta

$$x^2 - (v - y)^2 = s^2.$$

Il cerchio dovrà necessariamente toccare la curva senza attraversarla: per ciò, se il punto  $Y$  si trova più vicino o più lontano rispetto al punto di intersezione dell'asse  $y$  con la curva, allora il cerchio non tocca la curva oppure

<sup>4</sup>Immagine presa da <http://www.mat.unimi.it/users/galuzzi/Materiali/Lezione6.pdf>.

taglia la curva in un ulteriore punto  $P'$ . Perciò, l'intersezione della circonferenza con la curva avrà zero soluzioni o due soluzioni distinte. Affinché la circonferenza sia tangente quindi è necessario che il sistema che corrisponde all'intersezione abbia una soluzione doppia. Sia dato, dunque, il sistema

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ x^2 - (v - y)^2 = s^2. \end{cases} \quad (2.1)$$

Eliminando la variabile  $x$  attraverso l'equazione della circonferenza, l'equazione della curva diventa  $\varphi(y) = 0$ . Per avere una soluzione doppia  $P_0 = (x_0, y_0)$ , bisogna imporre

$$\varphi(y) = (y - y_0)^2 \psi(y)$$

con  $\psi(y)$  di grado inferiore di due rispetto al grado di  $\varphi(y)$ . Si sviluppa a destra e sinistra e si confrontano i coefficienti di potenze uguali. In questo modo si ottiene un sistema che ha per incognite i coefficienti di  $\psi(y)$ ,  $v$  ed  $s$ , che identificano il cerchio ricercato. In questo modo si determina la normale e, di conseguenza, la retta tangente.

Tale metodo presenta alcuni limiti: oltre ad essere valido solo per curve algebriche, presenta diverse difficoltà di calcolo per curve di grado superiore al secondo.

Descartes propose come esempio la ricerca della tangente ad un'ellisse di equazione

$$x^2 = ry - \left(\frac{r}{q}\right)y^2.$$

In particolare, per facilitare i calcoli, scegliamo  $r = 2$  e  $q = \frac{1}{2}$ . L'equazione dell'ellisse va messa a sistema con  $x^2 + (v - y)^2 = s^2$ . Dal sistema (2.1), otteniamo che

$$\varphi(y) : s^2 - (v - y)^2 - ry + \left(\frac{r}{q}\right)y^2 = 0.$$

Siccome  $\varphi(y)$  ha grado 2,  $\psi(y)$  corrisponde ad una costante  $k$ . Si ottiene così

$$s^2 - v^2 - y^2 + 2vy - ry + \left(\frac{r}{q}\right)y^2 = (y - y_0)^2 k$$

$$s^2 - v^2 + 3y^2 + (2v - 2)y = ky^2 - 2ky_0y + ky_0^2$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} 3 = k \\ s^2 - v^2 = ky_0^2 \\ 2v - 2 = -2ky_0. \end{cases}$$

Ponendo  $y_0 = 0$ , si ricava  $v = 1$  e  $s = 1$ . L'equazione della circonferenza tangente è dunque:

$$x^2 - 2y + y^2 = 0.$$

## Costruzione geometrica delle equazioni

Il Libro III pone l'attenzione sulla la costruzione di problemi solidi e soprassolidi mediante l'uso di coniche e linee di grado superiore ad esse. Descartes suddivise il libro in tre parti:

1. Considerazioni generali sulle equazioni e loro risoluzione.
2. Equazioni di problemi piani.
3. Costruzione di problemi con equazioni di grado fino a sei.

Descartes affrontò la natura delle equazioni, studiandole a partire dalle loro radici. Riuscì così a scrivere in modo sistematico l'espressione come un polinomio a coefficienti di segno qualunque uguagliato a zero e ad affermare che esiste una corrispondenza tra il grado dell'equazione e il numero delle sue radici.

Enunciò in seguito una tecnica che, data una curva, permetteva di costruire tramite segmenti le radici di un'equazione. In particolare, analizzò l'esempio seguente, rappresentato nella Figura 2.16:

Sia data l'equazione

$$z^4 = pz^2 - qz + r. \quad (2.2)$$

- Costruiamo una parabola  $FAg$  di vertice  $A$ , lato retto  $AS = 1$ , dove il lato retto è il segmento passante per il fuoco perpendicolare all'asse della parabola. Inoltre, dati  $C$  e  $D$  punti sull'asse della parabola, sia  $AC = \frac{1}{2}$ ,  $CD = \frac{1}{2}p$ , e tracciamo un segmento  $DE$  perpendicolare all'asse in modo che  $DE = \frac{1}{2}q$ . Infine, prendiamo  $R$  punto sul segmento  $AE$  in modo che  $AR = r$ .
- Tracciamo la semicirconferenza di centro  $V$ , punto medio del segmento  $RS$ , e diametro  $RS$ .
- Tracciamo la perpendicolare ad  $RS$  passante per  $A$ , che incontra la semicirconferenza nel punto  $H$ .

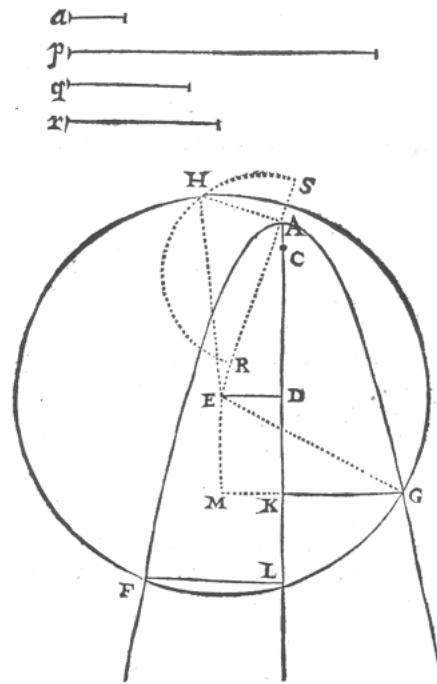


Figura 2.16: [4, p. 390].

- Disegniamo la circonferenza di centro  $E$  e raggio  $EH$  e prendiamo in considerazione le intersezioni fra parabola e circonferenza.

Osserviamo che l'ultima circonferenza costruita può intersecare la parabola in uno, due, tre o quattro punti. Tracciando le perpendicolari all'asse della parabola passanti per questi punti, individuiamo sull'asse tutte le radici dell'equazione. Se l'intersezione tra cerchio e parabola è nulla, le radici sono tutte immaginarie.

Per arrivare a questo ragionamento, Descartes andò a risolvere il seguente problema geometrico:

*Trovare la lunghezza del segmento  $KG$ , conoscendo la lunghezza dei segmenti  $AC$ ,  $CD$ ,  $DE$ ,  $AR$ .*

Sia  $z = KG$ . Siccome vale la relazione

$$AK : KG = KG : \text{lato retto}$$

e siccome abbiamo imposto che la lunghezza del lato retto sia 1, otteniamo  $AK = z^2$ .

Inoltre, osserviamo che

$$DK = EM = AK - AC - CD$$

da cui

$$EM = z^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p.$$

Elevando entrambi i termini al quadrato, ricaviamo

$$EM^2 = \left(z^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p\right)^2 = z^4 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}p^2 - z^2 - pz^2 + \frac{1}{2}p.$$

Inoltre, valgono le seguenti relazioni:

$$KM = DE = \frac{1}{2}q$$

$$GM = z + \frac{1}{2}q$$

ed elevando al quadrato, si ottiene

$$GM^2 = z^2 + \frac{1}{4}q^2 + qz.$$

Dunque, sfruttando il Teorema di Pitagora, concludiamo

$$\begin{aligned} EG^2 = GM^2 + EM^2 &= z^2 + \frac{1}{4}q^2 + qz + z^4 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}p^2 - z^2 - pz^2 + \frac{1}{2}p \\ &= \frac{1}{4}q^2 + qz + z^4 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}p^2 - pz^2 + \frac{1}{2}p. \end{aligned}$$

Proseguiamo il ragionamento osservando che  $EG = EH$ , in quanto entrambi i segmenti sono raggi della stessa circonferenza. Sfruttando ancora il Teorema di Pitagora sul triangolo  $EHA$  abbiamo

$$EA^2 = DE^2 + AD^2 = \frac{1}{4}q^2 + \left(\frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}\right)$$

mentre

$$AS : AH = AH : AR, \text{ da cui } AH^2 = r.$$

Si può così concludere che

$$EH^2 = \frac{1}{4}q^2 + \left(\frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}\right) + r.$$

Ponendo infine  $EG^2 = EH^2$ , otteniamo l'equazione cercata:

$$\frac{1}{4}q^2 + qz + z^4 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}p^2 - pz^2 + \frac{1}{2}p = \frac{1}{4}q^2 + \left(\frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}\right) + r$$

$$z^4 = pz^2 - qz + r.$$

Descartes affermò che, attraverso la parabola, che considerava la più semplice delle coniche, è possibile trovare tutte le radici di equazioni di terzo e quarto grado, riducendo le equazioni di quarto grado nella forma dell'equazione (3.2.1), e le equazioni di terzo grado nella forma

$$z^3 - pz + q = 0.$$

### 2.2.2 Le curve studiate dal punto di vista analitico

Come si è potuto osservare anche dall'esempio proposto da Descartes nel paragrafo precedente, durante il Rinascimento cambiò l'approccio e la visione dei problemi geometrici. Furono Fermat e Descartes a sviluppare un metodo generale per l'analisi di problemi geometrici attraverso metodi algebrici e analitici. Da questo nuovo tipo di impostazione, nacque lo studio delle curve dal punto di vista analitico: da una parte quelle già scoperte durante l'antichità vennero studiate in maniera più approfondita, permettendone una descrizione attraverso le equazioni cartesiane e parametriche, dall'altra si scoprirono nuove curve. Di seguito descriveremo le equazioni algebriche di alcune curve studiate durante questo periodo. Inoltre, ne esporremo anche la rappresentazione parametrica, anche se essa venne scoperta ed analizzata dopo il Rinascimento, grazie all'approccio fisico di Newton che poneva come unica variabile indipendente quella temporale, e l'equazione in coordinate polari, che vennero introdotte verso la metà del XVII secolo.

### Retta e circonferenza

L'equazione cartesiana della retta rispetto ad un sistema di riferimento qualsiasi è

$$ax + by + c = 0.$$

Una rappresentazione parametrica della retta è:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

dove  $P_0 = (x_0, y_0)$  è un punto della retta e  $(l, m)$  sono componenti di un vettore parallelo alla retta.

L'equazione della retta in coordinate polari si ricava dalla relazione tra coordinate polari e cartesiane:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta. \end{cases}$$

Fissata la semiretta polare tale che la retta formi con essa un angolo  $\gamma$  e preso il polo nell'origine del piano cartesiano, si ottiene:

$$\rho = \frac{q \cos \gamma}{\sin(\theta - \gamma)}.$$

L'equazione cartesiana della circonferenza di centro  $(x_0, y_0)$  e raggio  $r$  rispetto a un sistema di riferimento qualsiasi segue dal teorema di Pitagora e risulta:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Una rappresentazione parametrica della circonferenza è:

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos \alpha \\ y = y_0 + r \sin \alpha \end{cases}$$

con  $\alpha \in [0, 2\pi]$ .

L'equazione della circonferenza in coordinate polari è:

$$\rho^2 + \rho(-2x_0 \cos \theta - 2y_0 \sin \theta) + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0.$$

## Le coniche

L'equazione cartesiana della parabola con vertice all'origine degli assi di riferimento è

$$y = kx^2$$

che si ottiene nel modo seguente, come illustrato in Figura 2.17: partendo dalla definizione di parabola come luogo (si veda Definizione 7), andiamo a fissare un sistema di riferimento. Scegliamo la retta perpendicolare alla retta direttrice passante per il fuoco come asse  $y$  e la retta perpendicolare all'asse  $y$  passante per il vertice come asse  $x$ . Sia  $a$  la distanza della retta direttrice dal vertice della parabola; dunque la distanza del fuoco dalla retta è  $2a$ . Quindi si ottiene la seguente relazione:

$$(y + a)^2 = (y - a)^2 + x^2$$

da cui si ottiene

$$x^2 - 4ay = 0.$$

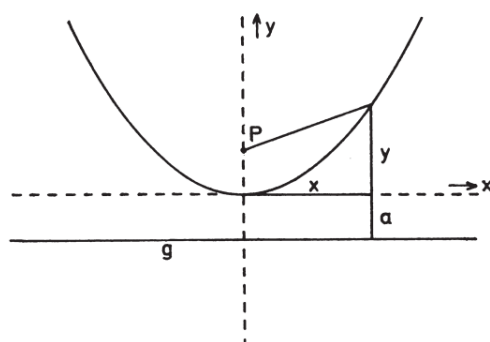


Figura 2.17: [2, p. 72].

Una rappresentazione parametrica della parabola è:

$$\begin{cases} x = t \\ y = kt^2. \end{cases}$$

L'equazione della parabola in coordinate polari è:

$$\rho = \frac{2a}{1 + \cos \theta}.$$

L'equazione cartesiana dell'ellisse con centro nell'origine degli assi di riferimento è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Per dimostrarlo, fissiamo come in Figura 2.18 il seguente sistema di riferimento: sia l'asse  $x$  passante per i due fuochi e l'asse  $y$  perpendicolare passante per il punto medio. Sia  $2c$  la distanza tra i due fuochi. Dalla definizione come luogo geometrico (si veda Definizione 7), si ha che la somma delle distanze dai due fuochi è costante. Sia dunque  $k$  la costante.

Dal teorema di Pitagora, si ha

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(c-x)^2 + y^2} = k$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = k - \sqrt{(c-x)^2 + y^2}.$$



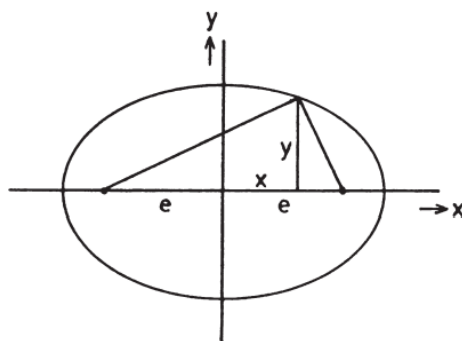


Figura 2.18: [2, p. 73].

Eleviamo al quadrato entrambi i membri:

$$(x + c)^2 + y^2 = k^2 + (c - x)^2 + y^2 - 2k\sqrt{(c - x)^2 + y^2}$$

$$4xc - k^2 = -2k\sqrt{(c - x)^2 + y^2}.$$

Eleviamo nuovamente al quadrato entrambi i membri:

$$16x^2c^2 + k^4 - 8xck^2 = 4k^2[(c - x)^2 + y^2]$$

$$\frac{16x^2c^2}{k^2} + k^2 - 8xc = 4[(c - x)^2 + y^2]$$

$$\frac{16x^2c^2}{k^2} - 4x^2 - 4y^2 = 4c^2 - k^2.$$

Osserviamo che  $k = 2a$  e che  $b^2 = a^2 - c^2$ . L'equazione precedente, dunque, diventa

$$\frac{x^2c^2}{a^2} - x^2 - y^2 = c^2 - a^2$$

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2}x^2 + y^2 = a^2 - c^2$$

$$\frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 = b^2.$$

Dividendo entrambi i membri per  $b^2$ , otteniamo l'equazione cercata. Una rappresentazione parametrica dell'ellisse, ricavata a partire dalla rappresentazione parametrica della circonferenza, è:

$$\begin{cases} x = a \cos \alpha \\ y = b \sin \alpha \end{cases}$$

con  $\alpha \in [0, 2\pi]$ .

L'equazione dell'ellisse in coordinate polari è:

$$\rho^2 \left( \frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2} \right) = 1.$$

L'equazione cartesiana dell'iperbole con centro nell'origine degli assi di riferimento è

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.3)$$

Essa si ottiene in maniera analoga all'ellisse, ricordando che ad essere costante è la differenza delle distanze dai due fuochi.

Una rappresentazione parametrica dell'iperbole è:

$$\begin{cases} x = \frac{a}{\cos \alpha} \\ y = b \tan \alpha \end{cases}$$

con  $\alpha \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ . Essa si ricava a partire dall'equazione (2.3), ponendo

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{\cos \alpha} \quad \frac{y}{b} = \tan \alpha.$$

L'equazione dell'iperbole in coordinate polari è:

$$\rho^2 \left( \frac{\cos^2 \theta}{a^2} - \frac{\sin^2 \theta}{b^2} \right) = 1.$$

### Cissoide di Diocle

L'equazione cartesiana della cissoide di Diocle, ponendo il punto  $A$  della costruzione nell'origine degli assi, è

$$y^2(2r - x) - x^3 = 0.$$

Per dimostrarlo, fissiamo il sistema di riferimento come in Figura 2.19, ovvero

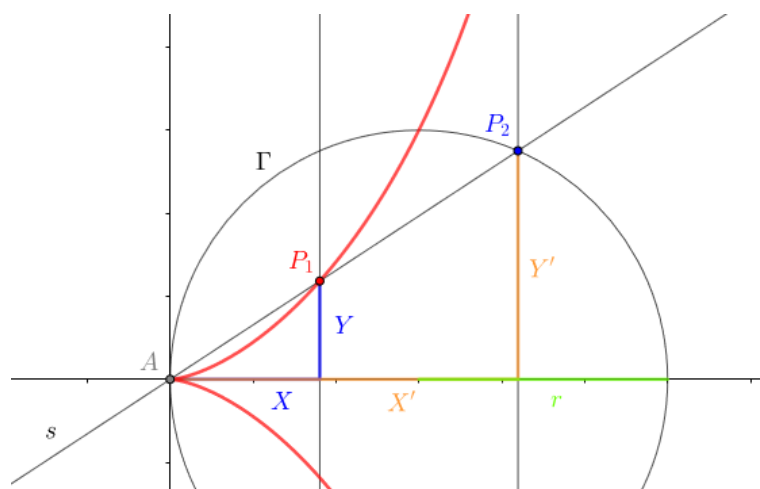


Figura 2.19

ponendo l'origine degli assi nel punto A della cissoide e l'asse  $x$  lungo il diametro della circonferenza che serve per disegnare la curva. Siano inoltre  $P_1 = (x, y)$  e  $P_2 = (x', y')$  rispettivamente i punti di intersezione della retta  $s$  usata per la costruzione con la cissoide e con la circonferenza. Valgono perciò le relazioni

$$\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$$

$$x' = 2r - x$$

$$y' = \sqrt{r^2 - (r - x)^2}.$$

Elevando al quadrato entrambi i membri dell'ultima equazione, otteniamo

$$y'^2 = 2rx - x^2$$

da cui

$$x'^2 \frac{y^2}{x^2} = x(2r - x)$$

$$(2r - x)^2 \frac{y^2}{x^2} = x(2r - x)$$

e possiamo concludere che

$$y^2(2r - x) - x^3 = 0.$$

Una rappresentazione parametrica della cissoide è:

$$\begin{cases} x = 2r(\tan \alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha) \\ y = 2r \sin \alpha^2 \end{cases}$$

con  $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

L'equazione della cissoide in coordinate polari è:

$$\rho = \frac{2r \sin \theta^2}{\cos \theta}.$$

Essa si ricava considerando un punto  $P = (\rho, \theta)$  sulla curva: richiamando la figura 2.7, dalla definizione come luogo geometrico risulta

$$AP = AQ_2 - AQ_1.$$

Dai triangoli rettangoli  $AA'Q_2$  e  $AQ_1A'$  si ricava

$$2r = AQ_2 \cos \theta \quad \text{e} \quad AQ_1 = 2r \cos \theta$$

da cui si ottiene l'equazione cercata.

## Concoide di Nicomede

L'equazione cartesiana della concoide di Nicomede è

$$(d - x)^2(x^2 + y^2) - k^2x^2 = 0.$$

Essa si può ricavare nel modo seguente. Fissiamo, come in Figura 2.20 l'origine del sistema di riferimento nel punto  $O$  e l'asse  $y$  parallelo alla retta  $r$  usata per la costruzione della curva. Allora valgono le seguenti relazioni:

$$\frac{y}{x} = \frac{y'}{d}$$

$$(y' - y)^2 + (d - x)^2 = k^2$$

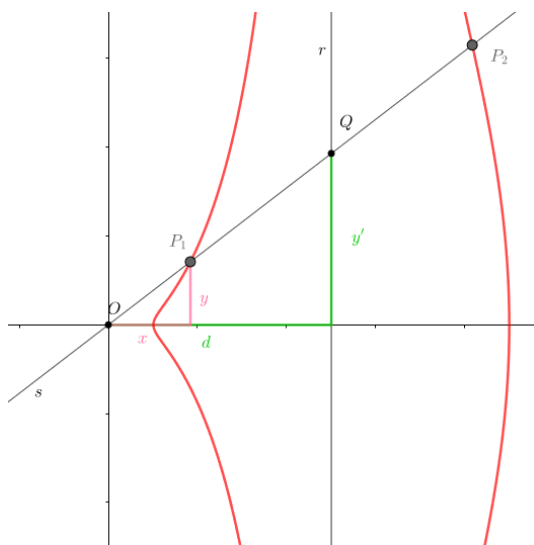


Figura 2.20

Da esse otteniamo

$$\left(\frac{y}{x}d - y\right)^2 + (d - x)^2 = k^2$$

$$\frac{y^2}{x^2}(d - x)^2 + (d - x)^2 = k^2$$

$$\frac{y^2 + x^2}{x^2}(d - x)^2 = k^2$$

e possiamo concludere che

$$(x^2 + y^2)(d - x)^2 - k^2x^2 = 0.$$

Una rappresentazione parametrica della conchoid è:

$$\begin{cases} x = d \pm k \cos \theta \\ y = d \tan \theta \pm k \sin \theta. \end{cases}$$

L'equazione della conchoid in coordinate polari è:

$$\rho_{P_1} = k + \frac{d}{\cos \theta} \quad \rho_{P_2} = -k + \frac{d}{\cos \theta}$$

che si ricava osservando che

$$OQ = \frac{d}{\cos \theta}.$$

## La spirica di Perseo

Ricordando la definizione di sezioni spiriche presente nella Sezione 2.1.1, andiamo innanzitutto a descrivere l'equazione di un toro. Poniamo il seguente sistema di riferimento, rappresentato in Figura 2.21: il cerchio, dalla cui rotazione si ottiene il toro, ruota attorno all'asse  $z$ , ha centro nel piano  $xy$  a distanza  $R$  dall'asse  $z$  e ha raggio  $r$ .

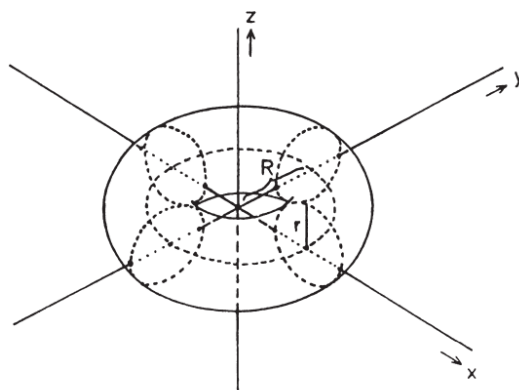


Figura 2.21: [2, p. 76].

L'equazione del toro è perciò

$$(R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = r^2$$

da cui

$$R^2 + x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 2R\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Si ottiene così la seguente equazione per il toro:

$$(R^2 - r^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Ponendo la  $y = c$ , con  $c$  costante, si ricava l'equazione delle sezioni spiriche:

$$(R^2 - r^2 + x^2 + c^2 + z^2)^2 - 4R^2(x^2 + c^2) = 0.$$

## La foglia di Descartes

Una delle prime curve scoperte seguendo un approccio analitico fu la foglia di Descartes, definita nel modo seguente:

**Definizione 10.** *La Foglia di Descartes è l'insieme dei punti tali che la somma dei cubi delle coordinate cartesiane è uguale al parallelepipedo rettangolo che ha per spigoli le coordinate stesse ed una lunghezza fissata.*

Se si indica la lunghezza con  $3a$ , si ottiene la seguente equazione:

$$x^3 + y^3 = 3axy. \quad (2.4)$$

Per costruire la curva, prendiamo in considerazione un'altra equazione descritta da Descartes in una lettera del 23 agosto 1638:

$$\frac{\eta^2}{\xi^2} = \frac{l - \xi}{l + 3\xi}. \quad (2.5)$$

Con un cambio di coordinate opportuno, ovvero considerando come assi cartesiani le bisettrici degli assi originari, si impone

$$\xi = \frac{x + y}{\sqrt{2}}$$

$$\eta = \frac{y - x}{\sqrt{2}}$$

da cui si ricava l'equazione (2.4) della foglia di Descartes.

Partendo dall'equazione (2.5), prendiamo in considerazione due punti della curva  $M, M_1$  simmetrici rispetto all'asse  $x$ . La retta passante per  $M$  ed  $M_1$ , parallela all'asse  $y$ , taglia l'asse  $x$  nel punto  $N$ . Sia ora  $\Gamma$  la circonferenza che passa per l'origine degli assi e ha centro sull'asse  $x$ . Proiettiamo da  $O$  i punti  $M$  ed  $M_1$  sulla circonferenza nei punti  $M'$  ed  $M'_1$ . La retta passante per  $M'$  ed  $M'_1$ , anch'essa parallela all'asse  $y$ , taglia l'asse  $x$  nel punto  $N'$ . Viceversa, partendo da  $N'$ , tracciando la parallela all'asse  $y$  incontriamo due punti  $M'$  ed  $M'_1$  sulla circonferenza tracciata. Proiettiamo da  $O$  i due punti sulla retta passante per  $N$  e parallela all'asse  $y$ . Il luogo dei punti trovati  $M$  ed  $M_1$  è la foglia di Descartes. Infatti, sia  $R$  il raggio della circonferenza. L'equazione della proiettività tra  $N$  ed  $N'$  è

$$\alpha x x' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0$$

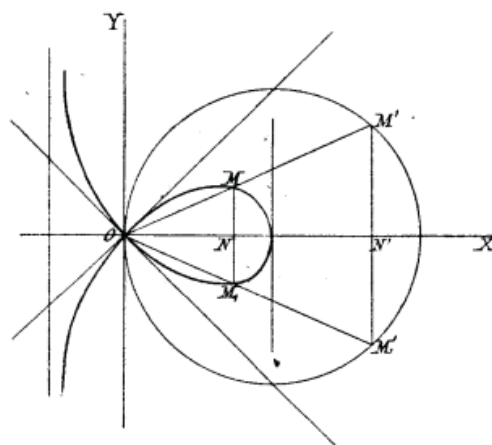


Figura 2.22: Foglia di Descartes [10, p. 65].

che si individua nel modo seguente: posto

$$f(z_0, z_1) = \begin{pmatrix} -\beta & -\delta \\ \alpha & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta z_0 - \delta z_1 \\ \alpha z_0 + \gamma z_1 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{z_0}{z_1}$$

$$x' = \frac{z'_0}{z_1}$$

otteniamo

$$f(x) = \frac{-\beta x - \delta}{\alpha x + \gamma} = x'$$

$$-\beta x - \delta = x'(\alpha x + \gamma)$$

da cui ricaviamo l'equazione cercata. Inoltre, se indichiamo con  $(x', y')$  le coordinate dei punti  $M'$  e  $M'_1$ , tenendo conto che questi giacciono sulla circonferenza, valgono

$$(x' - R)^2 + y'^2 = R^2$$

$$x'(2R - x') = y'^2$$

e

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$$



Isolando da entrambe le equazioni  $y'^2$  e mettendole a confronto, otteniamo

$$2R - x' = \frac{y^2 x'}{x^2}$$

$$2Rx^2 - x^2 x' - y^2 x' = 0$$

$$(x^2 + y^2) \left( \frac{2Rx^2}{x^2 + y^2} - x' \right) = 0.$$

L'equazione del luogo di punti  $M$  ed  $M_1$  risulta così

$$\frac{2Rx^2}{x^2 + y^2} + \frac{\beta x + \delta}{\alpha x + \gamma} = 0$$

da cui si ottiene

$$\frac{2R\alpha x^3 + 2R\gamma x^2 + \beta x^3 + \beta xy^2 + \delta x^2 + \delta y^2}{(x^2 + y^2)(\alpha x + \gamma)} = 0$$

$$(2R\alpha + \beta)x^3 + (2R\gamma + \delta)x^2 + \beta xy^2 + \delta y^2 = 0.$$

Tale equazione coincide con (2.5) se supponiamo

$$2R\alpha + \beta = \frac{\beta}{3} = -\frac{2R\gamma + \delta}{l} = \frac{\delta}{l}.$$

Una rappresentazione parametrica della foglia di Descartes è:

$$\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$$

L'equazione della curva in coordinate polari è:

$$\rho = \frac{3a \cos \theta \sin \theta}{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}.$$

## Rullette

Durante il Rinascimento venne scoperta una nuova classe di curve dette rullette. Una rulletta è il luogo dei punti di un cerchio  $K$  che rotola senza scivolare lungo un cerchio fissato  $K'$ . A seconda della posizione dei cerchi, tali curve si dividono in epicicloid, ipocicloid e pericicloid.

**Definizione 11.** *L'epicicloide è generata da un punto  $P$  di una circonferenza  $K$  che rotola esternamente a un'altra circonferenza  $K'$ .*

*L'ipocicloide è generata da un punto  $P$  di una circonferenza  $K$  che rotola internamente a un'altra circonferenza  $K'$ .*

*La pericicloide è generata da un punto  $P$  di una circonferenza  $K$  che rotola su un'altra circonferenza  $K'$  più piccola e interna.*

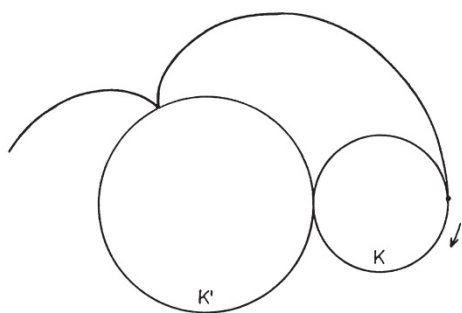


Figura 2.23: Epicicloide [2, p. 19].

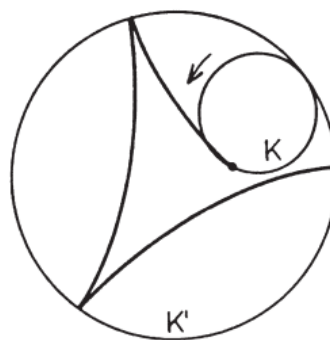


Figura 2.24: Ipocicloide [2, p. 19].

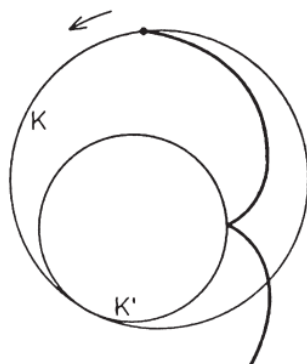


Figura 2.25: Pericicloide [2, p. 20].

Se  $K'$  degenera in una retta, la curva è detta **cicloide**, mentre se  $K$  degenera ad una retta, la curva è detta **evolvente di cerchio**.



Figura 2.26: Cicloide [2, p. 20].

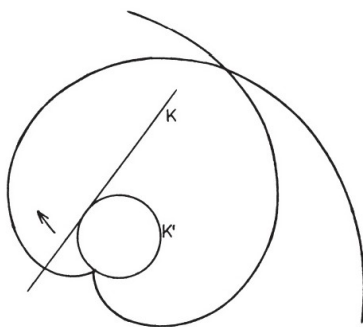


Figura 2.27: Evolvente di cerchio [2, p. 20].

Nel corso dei tre secoli successivi, i matematici studiarono queste curve, scoprendone diverse caratteristiche. Una di queste, che riguarda epi-, ipo- e pericicloidali, è la seguente. Siano  $r$  ed  $r'$  i raggi rispettivamente di  $K$  e  $K'$ . Se il rapporto  $\frac{r}{r'}$  è un numero razionale, la curva è chiusa; se il rapporto è un numero irrazionale, la curva è aperta. A seconda del valore del rapporto, la curva assume diverse forme, ad esempio:

- **cardioide**: epicycloide con  $\frac{r}{r'} = 1$
- **nefroide**: epicycloide con  $\frac{r}{r'} = \frac{1}{2}$
- **ipocicloide tricuspide**: ipocicloide con  $\frac{r}{r'} = \frac{1}{3}$ .

Le dimensioni della cicloide inoltre, sono legate alla circonferenza generatrice: la lunghezza di un arco di cicloide è pari a quattro volte il diametro della

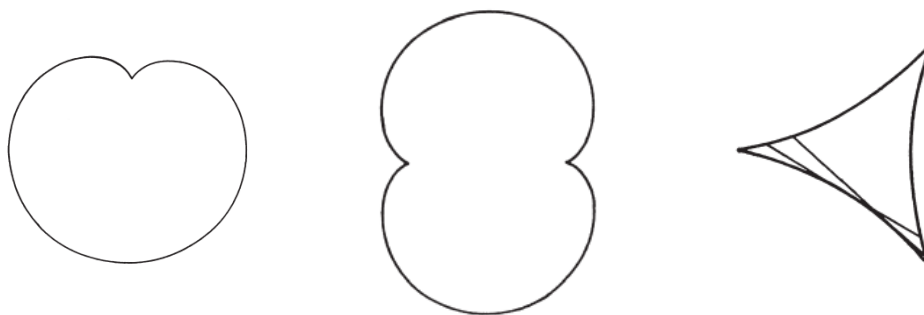


Figura 2.28: Cardioide (a sinistra), nefroide (al centro), ipocicloide tricuspide (a destra) [2, pp. 30-32].

circonferenza, che equivale all'altezza massima dell'arco, e la base sottostante l'arco è uguale alla circonferenza. Inoltre, per ogni punto  $P$  della cicloide, il raggio della curvatura  $OP$  è dimezzato dalla base  $b$ , come rappresentato in Figura 2.29.

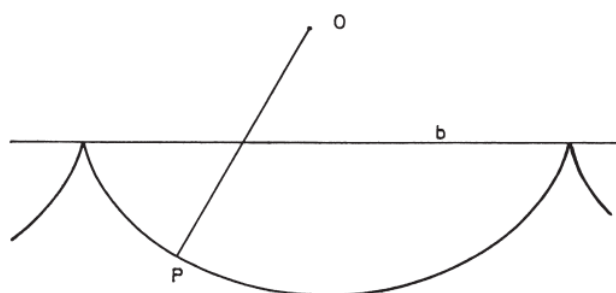


Figura 2.29: [2, p. 27]

Lo studio delle rullette fu fondamentale per lo sviluppo della curva detta **brachistocrona**, che analizzeremo nella Sezione 2.3.

## 2.3 Le curve dopo il Rinascimento

Anche dopo il Rinascimento, proseguì lo studio delle curve. Matematici come Jacob Bernoulli, Newton e Leibniz contribuirono ad ampliarne la teoria scoprendo nuove curve e approcciando l'argomento da diversi punti di vista.

## Curva kappa

Tra le curve nuove che vennero studiate, vi è anche la curva kappa, o curva di Gutschoven. Gerald Gutschoven fu professore di matematica a Louvain dal 1640 al 1659, e viene attribuito a lui il seguente problema:

*«Dati una retta  $r$  ed un suo punto  $O$ , trovare il luogo di un punto  $M$  tale che, condotta  $OM$  e poi  $MN$  ad essa perpendicolare e secante  $r$  in  $N$ , risulti  $MN$  eguale ad un segmento dato  $a$ .»<sup>5</sup>*

Tale quesito fu analizzato da R. F. de Slouse in alcune lettere a Huygens del 1662.

La soluzione di questo problema è proprio la curva kappa, che ha come equazione cartesiana, rispetto ad un sistema centrato in  $O$  e che ha  $r$  come asse  $x$ ,

$$a^2 x^2 = (x^2 + y^2)y^2.$$

Essa è una quartica, simmetrica rispetto agli assi di riferimento e con un tacnodo <sup>6</sup> nell'origine degli assi.

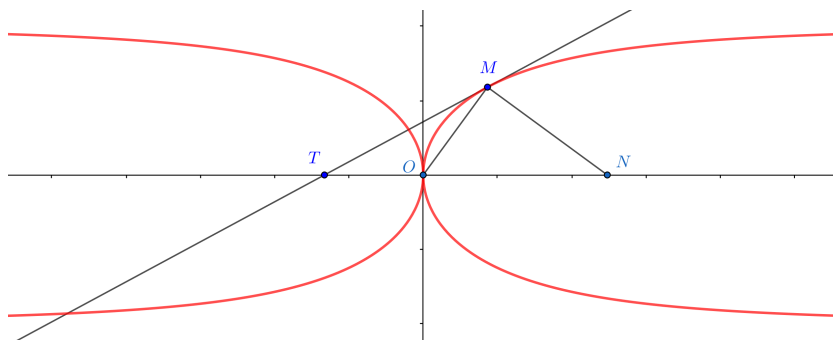


Figura 2.30: Curva kappa.

<sup>5</sup>Si veda [10, p. 233].

<sup>6</sup>Il *tacnodo* è un punto in cui si incontrano due rami della curva e in cui tali rami ammettono la stessa retta tangente.

In coordinate polari, l'equazione è

$$a \cos \theta = \rho \sin \theta$$

preso  $O$  come polo e retta  $r$  come asse polare.

Nella lettera del 25 settembre 1662, inoltre, è presente lo studio delle tangenti alla kappa, analizzate partendo dalla seguente rappresentazione parametrica:

$$\begin{cases} x = a \frac{\cos \theta^2}{\sin \theta} \\ y = a \cos \theta. \end{cases}$$

La tangente alla curva nel punto  $M$  taglia la retta  $r$  in un punto  $T$ . La lunghezza del segmento  $OT$  risulta:

$$OT = a \frac{\cos^2 \theta}{\sin^3 \theta}.$$

Possiamo calcolare così la lunghezza del segmento  $TN$ :

$$TN = ON + OT = \frac{a}{\sin \theta} + a \frac{\cos^2 \theta}{\sin^3 \theta}.$$

Chiamato  $P$  il punto di intersezione della retta perpendicolare a  $r$  passante per  $M$  con la retta stessa, e ricordando che  $OMN$  è un triangolo rettangolo, otteniamo

$$NP = a \sin \theta$$

da cui

$$TN \cdot NP = ON^2.$$

Questo significa che  $TN$ ,  $ON$  e  $NP$  sono in proporzione tra loro. Perciò, dato il punto  $M$ , si riesce a trovare il punto  $T$  e di conseguenza la retta tangente alla curva nel punto  $M$ .

## Lemniscata di Bernoulli

La lemniscata di Bernoulli comparve per la prima volta in un articolo degli *Acta eruditorum* del 1694 dal titolo *Jacobi Bernoulli Constructio curvae accessus et recessus aequabilis, ope rectificationis curvae cujusdam algebraicae, addenda nuperae solutione mensis Junii*. Essa risulta un caso particolare della curva cassiniana.

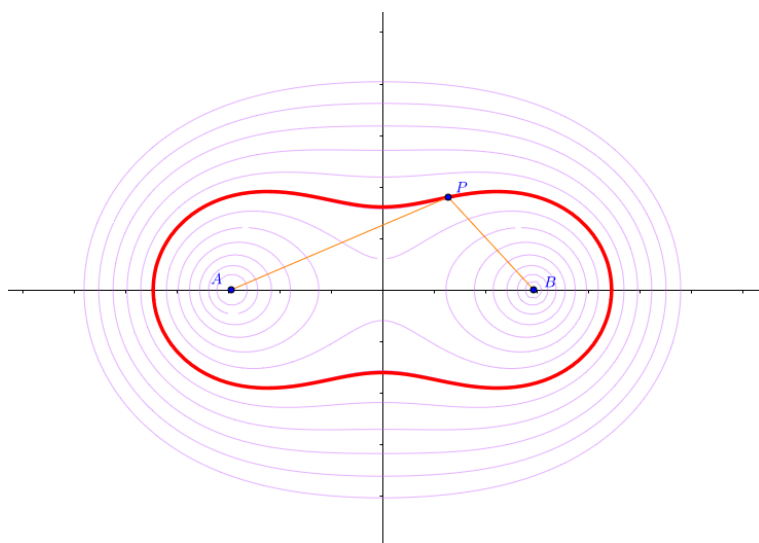


Figura 2.31: Ovale di Cassini.

**Definizione 12.** *Siano dati due punti  $A$  e  $B$ , detti fuochi, a distanza  $2a$  e un numero  $c > 0$ . La **curva di Cassini**, detta anche **ovale di Cassini**, è il luogo dei punti  $P$  tale che*

$$PA \cdot PB = c^2.$$

Tali curve nacquero a seguito di studi astronomici condotti da Cassini, vissuto dal 1625 al 1712. Egli riteneva che il Sole ruotasse attorno alla Terra descrivendo un ovale e la Terra fosse uno dei due fuochi. Rispetto ad un sistema di riferimento in cui i fuochi giacciono sull'asse delle ascisse e l'asse delle ordinate passa per il punto medio del segmento  $AB$ , l'equazione di tale curva è:

$$[(x + a)^2 + y^2][(x - a)^2 + y^2] = c^4$$

che si ottiene nel modo seguente. Osservando che  $A = (-a, 0)$  e  $B = (a, 0)$ , attraverso il teorema di Pitagora, calcoliamo

$$\begin{aligned} PA &= \sqrt{y^2 + (x + a)^2} \\ PB &= \sqrt{y^2 + (x - a)^2}. \end{aligned}$$

Dal momento che il prodotto delle distanze deve essere costante, imponiamo  $PA \cdot PB = c^2$ ; elevando al quadrato entrambi i membri, ricaviamo l'equazione cercata.

Per  $a = c$ , si ha un punto doppio e un doppio anello. Tale curva è detta **Lemniscata di Bernoulli**, dalla parola  $\lambda\eta\mu\nu\acute{\iota}\sigma\kappa\omicron\varsigma$  (lemniscos), che significa

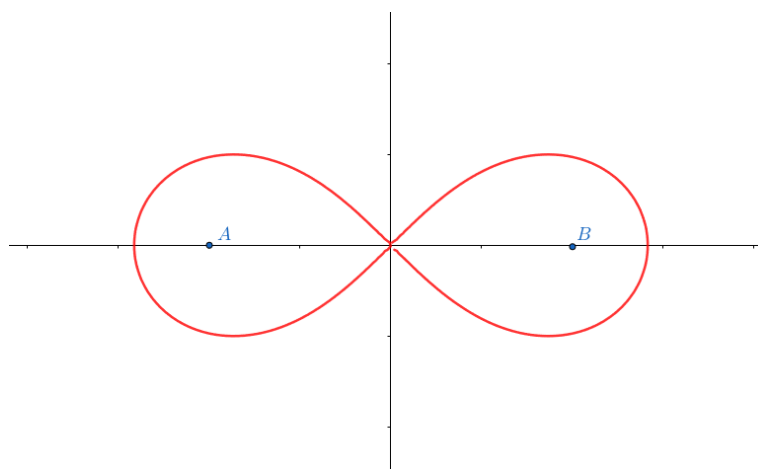


Figura 2.32: Lemniscata di Bernoulli.

"ciclo a forma di otto".

L'equazione cartesiana si ricava dall'equazione di Cassini per  $a = c$ :

$$[(x + a)^2 + y^2][(x - a)^2 + y^2] = a^4.$$

La lemniscata fu fonte di diversi studi da parte dei matematici. In particolare, la generalizzazione dello studio della sua rettificazione<sup>7</sup> da parte di Giovanni Fagnano de Toschi (1682-1766) fu il cuore della teoria delle funzioni ellittiche. Egli, infatti, riuscì a dimostrare che ogni arco di lemniscata si può dividere in  $n$  parti uguali, se  $n$  è della forma  $(2.2)^m$ ,  $(3.2)^m$ ,  $(5.2)^m$ .<sup>8</sup>

## La curva brachistocrona

Il termine "brachistocrona" viene dal greco *βράχιστος χρόνος* (brachistos cronos), che significa "minor tempo". Nel 1696, Johann Bernoulli pubblicò negli *Acta eruditorum* il seguente problema:

*Una particella è vincolata a muoversi, sotto l'azione della sola forza di gravità, da un punto A a un punto B (più basso). Trovare il percorso per il quale la particella si muova da A a B nel minor tempo possibile, nell'ipotesi che la velocità iniziale in A sia nulla.*

Egli propose una soluzione pubblicandola l'anno seguente nello stesso periodico.

<sup>7</sup>La *rettificazione di una curva* è la determinazione di un segmento la cui lunghezza è uguale a quella della curva.

<sup>8</sup>Per approfondimento, si veda [10, p. 257].



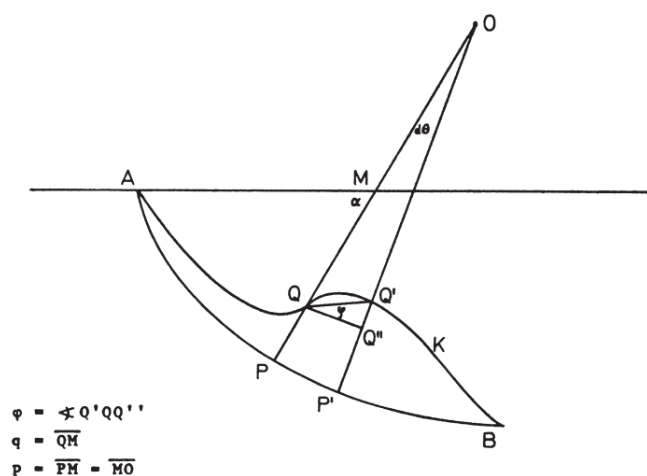


Figura 2.33: Brachistocrona [2, p. 28].

Sia  $b$  la retta orizzontale passante per  $A$ . La cicloide passante per  $A$  e  $B$  con base  $b$  è la curva cercata. Infatti, per la legge di conservazione dell'energia, per ogni punto  $P$  che scorre lungo una curva da  $A$  a  $B$  vale:

$$mgy = \frac{m}{2}v^2$$

con  $m =$  massa,  $v =$  velocità,  $y =$  altezza di  $P$  misurata dalla retta  $b$ . Da questa relazione, ricaviamo

$$v = \sqrt{2gy}.$$

Sia ora  $K$  una curva da  $A$  a  $B$ . Dimostriamo che, quando il tempo di caduta è minimo, tale curva deve essere cicloide. Siano  $OP$  il raggio della curvatura nel punto  $P$  sulla cicloide,  $Q$  l'intersezione di  $OP$  con  $K$  e  $M$  l'intersezione di  $OP$  con la retta  $b$ . Sia  $q = QM$ ,  $p = PM = MO$  e  $\alpha$  l'angolo  $AM\hat{P}$ . Fissiamo rispettivamente  $P'$  e  $Q'$  infinitesimamente vicini a  $P$  nella cicloide e  $Q$  nella curva  $K$ , chiamiamo  $d\theta$  l'angolo  $PÔP'$  e  $Q''$  il punto sul segmento  $Q'P'$  che forma con  $Q$  e  $Q'$  un angolo retto. Sia inoltre  $\varphi$  l'angolo  $Q'\hat{Q}Q''$ . Confrontiamo il tempo  $dt$  che la particella impiega per passare da  $P$  a  $P'$  con il tempo  $d\tau$  che la particella impiega per passare da  $Q$  a  $Q'$ . Per farlo, consideriamo la velocità a  $P$  e a  $Q$ :

$$v_P = \sqrt{2gp \sin \alpha}$$

$$v_Q = \sqrt{2gq \sin \alpha}.$$

Le distanze risultano inoltre

$$PP' = 2pd\theta$$

$$QQ'' = QQ' \cos \varphi = (q + p)d\theta.$$

Possiamo, dunque, indicare le distanze temporali nel modo seguente:

$$dt = \frac{2pd\theta}{\sqrt{2gp \sin \alpha}}$$

$$d\tau = \frac{(q + p)d\theta}{\sqrt{2gq \sin \alpha \cos \varphi}}.$$

Osserviamo che

$$\frac{q + p}{\sqrt{q}} = \frac{(\sqrt{q} - \sqrt{p})^2}{\sqrt{q}} + 2\sqrt{p} \geq 2\sqrt{p}$$

da cui  $dt \geq d\tau$ . In particolare, l'uguaglianza vale solo se

$$\sqrt{q} - \sqrt{p} = 0$$

ovvero  $P = Q$ . La brachistocrona permise l'inizio dello sviluppo del calcolo delle variazioni, dal momento che il suo problema fu uno dei primi problemi variazionali.

## 2.4 L'approccio di Newton alla teoria delle curve

Isaac Newton (1672-1726) fu un matematico e fisico inglese che costruì una classificazione delle cubiche e analizzò la teoria delle curve seguendo un approccio meccanico.

Tra il 1670 ed il 1671 Newton scrisse il trattato *De methodis serierum et fluxionum*, dove venne illustrato l'approccio analitico per discutere problemi tipici relativi allo studio delle curve. Alla base di questo metodo vi era il fluire del tempo e la descrizione cinematica delle curve. Secondo Newton, come riportato in [14], le quantità matematiche sono generate dal fluire continuo del tempo e vengono dette **fluenti**, mentre le velocità istantanee sono dette **flussioni**. Perciò, se le fluenti sono le variabili  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , le flussioni sono indicate con  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$ ... Nel *De Methodis*, Newton espresse la seguente riflessione:

*«I momenti delle quantità fluenti (cioè le loro parti indefinitamente piccole per addizione delle quali esse crescono nei singoli spazi di tempo indefinitamente piccoli) stanno come le velocità del fluire. Poiché se il momento di una quantità, come  $x$ , è espresso dal prodotto della sua velocità  $m$  e della quantità infinitamente piccola  $o$  (cioè  $mo$ ), i momenti delle altre  $v, y, z$  saranno espressi da  $vo, yo, zo$  considerato che  $vo, xo, yo, zo$  stiano tra loro come  $v, x, y, z$ .»<sup>9</sup>*

Queste idee vennero applicate per la risoluzione di diversi problemi, come determinare la tangente ad una curva o calcolare la lunghezza di una curva, che vennero ridotti a due tipi di problemi:

1. Trovare la velocità del moto in ogni tempo proposto, data in modo continuo la lunghezza dello spazio.
2. Trovare la lunghezza dello spazio descritto in ogni tempo proposto data in modo continuo la velocità del moto.

Egli applicò questi ragionamenti per lo studio delle tangenti ad una curva e il problema della quadratura di una curva.<sup>10</sup> Seguendo un approccio fisico, possiamo notare che queste due operazioni sono una l'inversa dell'altra: la ricerca delle tangenti dà la velocità, quando è noto lo spazio, mentre la quadratura dà lo spazio, quando è nota la velocità. Se dunque la ricerca delle tangenti si può ricondurre alla derivazione, la quadratura può essere associata all'integrazione.

Per quanto riguarda la costruzione della tangente, sia  $ED$  una curva, rappresentata in Figura 2.34.

Supponiamo di muovere il punto  $D$  di uno spazio infinitamente piccolo in modo che l'ordinata aumenti di  $c\partial$  e l'ascissa cresca di  $Dc$ . La retta che tocca la curva nei punti  $D$  e  $\partial$  è la tangente cercata.

La retta  $D\partial$  tocca l'asse  $x$  nel punto  $T$ . Osserviamo che i triangoli  $Dc\partial$  e  $TBD$  sono simili, da cui

$$\frac{TB}{BD} = \frac{Bb}{c\partial}.$$

Seguendo il metodo delle flussioni, ricaviamo

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{Bb}{c\partial}$$

<sup>9</sup>Si veda [14, p. 24].

<sup>10</sup>Il problema delle quadrature è un caso particolare del problema generale dell'integrazione delle equazioni differenziali.

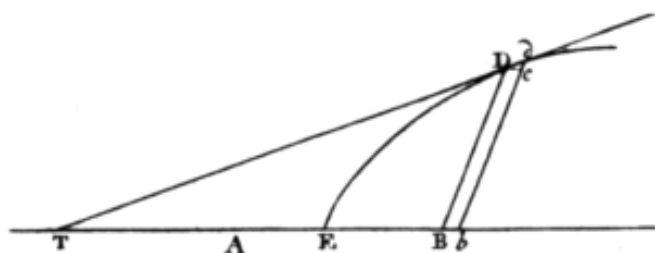


Figura 2.34: Studio della tangente ad una curva [14, p. 46].

da cui si conclude che

$$TB = \frac{\dot{x}}{\dot{y}}y.$$

Passare dalle aree alla curva o dalla flussione alla fluente è più complesso. Tra i metodi sviluppati da Newton per lo studio della quadratura, vi è l'integrazione di un'equazione differenziale. Venne dimostrato che, partendo da un'area limitata da una curva, dall'asse  $x$  e da due ordinate di cui una variabile, la flussione dell'area rispetto all'ascissa è l'ordinata variabile. Perciò, la ricerca dell'area si spostò sulla ricerca di una funzione la cui derivata è nota. Newton suppose di conoscere l'integrale  $F(x)$  cercata, scritta nel modo seguente:

$$F(x) = x^\alpha R^\beta S^\gamma$$

con  $\alpha, \beta, \gamma$  esponenti razionali ed  $R$  e  $S$  polinomi o serie ordinate secondo le potenze crescenti di  $x^n$ , con  $n$  intero positivo. Partendo da questi presupposti, riuscì a quadrare le curve più semplici con cambiamenti di variabili o altri artifici. Se questo approccio non risultava possibile, procedeva sviluppando in serie di potenze di  $x$  l'integrale incognito mediante approssimazioni successive. Il metodo delle flussioni aveva anche applicazioni geometriche quali, ad esempio, la determinazione del raggio di curvatura e la ricerca di massimi e minimi.

### 2.4.1 Descrizione delle cubiche

Newton si occupò anche di stabilire una classificazione delle curve. Un primo approccio abbastanza intuitivo riguarda l'ordine della curva, che corrisponde al grado del polinomio associato: l'equazione della curva  $F(x, y) = 0$  può essere più o meno complessa a seconda del grado del polinomio. Sotto determinate coordinate cartesiane, l'equazione si può trasformare in un'altra

con lo stesso ordine, perciò esso risulta una invariante per le proprietà qualitative della curva. Una prima denominazione delle curve risulta, perciò, la seguente:

- Le curve di ordine 1 sono le rette, con equazione

$$ax + by + c = 0.$$

- Le curve di ordine 2 sono le sezioni coniche, dette anche **quadriche**, con equazione

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

- Le curve di ordine 3 sono dette **cubiche**.

In particolare, le cubiche vennero analizzate con particolare interesse da Newton.

Sia  $f(x, y) = 0$  un'equazione polinomiale di terzo grado. Andiamo a studiare il comportamento asintotico della curva, a seconda dell'equazione cartesiana che la descrive. Il comportamento asintotico dipende dagli elementi di terzo grado del polinomio, perciò possiamo limitarci a studiare il polinomio omogeneo

$$\tilde{f}(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3.$$

Vi sono due casi possibili:

1.  $\tilde{f}$  è il cubo di una forma lineare. Tramite opportuno cambio di coordinate, la forma di  $\tilde{f}$  risulta  $\tilde{f}(x, y) = ax^3$ , con  $a \neq 0$ .
2.  $\tilde{f}$  non è il cubo di una forma lineare. Tramite opportuno cambio di coordinate, la forma di  $\tilde{f}$  risulta  $\tilde{f}(x, y) = xy^2 - ax^3$ .

Nella  $f$  possono comparire anche i monomi  $y^2$ ,  $xy$  e  $y$ . Nel primo caso, tramite un cambio di coordinate, si possono eliminare  $xy$  e, se compare  $y^2$ , anche  $y$ . Se non compare  $y^2$  ma  $xy$ , si può eliminare  $y$ . Nel secondo caso, si possono eliminare  $y^2$  e  $xy$  modificando l'origine del sistema di coordinate. Le equazioni cartesiane di tutte le cubiche si riducono così, mediante opportune trasformazioni, a quattro equazioni canoniche:

1.  $xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$ .
2.  $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , che corrisponde alle curve chiamate **tridenti**.
3.  $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$  che corrisponde alle curve chiamate **parabole divergenti**.

4.  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  che corrisponde alle curve chiamate **parabole cubiche**.

Newton proseguì il ragionamento, suddividendo i casi in base alle radici di  $ax^3 + bx^2 + cx + d$  e ottenendo così 72 casi diversi. Lo studio del primo caso risultò il più complesso, e si arrivò ad avere lo schema proposto in Figura 2.35.

|   |                                       |   |                                   |  |
|---|---------------------------------------|---|-----------------------------------|--|
| <b>I. <math>xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d</math></b> |                                       |   |                                   |  |
| $a > 0$   | iperbole ridondanti<br>od iperboliche | }   | adiametriali ..... 9 specie       |  |
|   |                                       |   | monodiametriali ..... 12+2 »      |  |
|   |                                       |   | tridiametriali ..... 2+2 »        |  |
|   |                                       |   | ad asintoti concorrenti ..... 9 » |  |
| $a > 0$   | iperbole difettive<br>od ellittiche   | }   | adiametriali ..... 6 »            |  |
|   |                                       |   | monodiametriali ..... 7 »         |  |
| $a = 0$   | }                                     | $b \neq 0$ , iperbole<br>paraboliche          | adiametriali ..... 7 »            |  |
|   |                                       |   | monodiametriali ..... 4+2 »       |  |
|   | }                                     | $b = 0$ , iperbo-<br>lismi<br>di coniche      | }                                 | iperbolismi { $c > 0$ , iperb. di iperbola... 4 specie |
|   |                                       |   |                                   | centrali { $c < 0$ , » di ellisse..... 3 »             |
|   |                                       |   |                                   | $c = 0$ , » di parabole... 2 »                         |
| II.   | $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$           | Tridente <sup>1)</sup> ..... 1 »              |                                   |  |
| III.  | $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + y$          | Parabole divergenti ..... 5 »                 |                                   |  |
| IV.   | $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$            | Parabola cubica o di Wallis <sup>2)</sup> 1 » |                                   |  |

Figura 2.35: Classificazione delle cubiche [10, p. 21].

Come riportato in [2], la descrizione delle cubiche proposta da Newton fu criticata in seguito da alcuni matematici, come Eulero, per la mancanza di un principio generale. Nel XIX secolo, il matematico Plücker stabilì una nuova classificazione, arrivando a definire 219 tipi di curve.

## 2.5 L'approccio di Leibniz

Anche Leibniz, matematico vissuto tra il 1646 e il 1716, studiò le curve, cercando in particolare un metodo per la ricerca delle tangenti ad una curva e analizzando le curve trascendenti. Le curve trascendenti sono curve che non si possono esprimere mediante un'equazione algebrica, ma necessitano l'introduzione di nuove funzioni.

La cicloide è un esempio di curva trascendente. L'equazione in coordinate

cartesiane della cicloide passante per l'origine è la seguente:

$$x = r \arccos \left( 1 - \frac{y}{r} \right) - \sqrt{y(2r - y)}$$

dove  $r$  è il raggio del cerchio che genera la cicloide.

La rappresentazione parametrica risulta:

$$\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t). \end{cases}$$

Leibniz affrontò il problema della ricerca delle tangenti nell'opera *Nova methodus pro maximis et minimis*. Presa una curva  $y = f(x)$ , egli suppose di tracciare la tangente uscente da un punto  $(x, y)$  della curva. Chiamò differenza un qualsiasi incremento dato ad  $x$ , indicato con  $dx$  e scelse il differenziale della funzione, chiamato  $dy$ , in modo tale che il rapporto  $\frac{dy}{dx}$  uguagliasse il coefficiente direttivo (o angolare) della tangente. Il metodo proposto da Leibniz si estendeva anche alle curve trascendenti. Seguendo tale metodo, Leibniz riuscì anche a risolvere il problema che era stato proposto da De Beaune (1601-1652) a Descartes. Esso consisteva nel determinare la curva di sottotangente costante, dove per sottotangente si intendeva il segmento dell'asse delle ascisse di un riferimento cartesiano avente per estremi il punto  $T$  di intersezione tra l'asse  $x$  e la retta tangente alla curva in un punto  $P_0$  né di massimo né di minimo, e il punto  $H$ , proiezione ortogonale di  $P_0$  sull'asse. In termini moderni, si tratterebbe di risolvere l'equazione differenziale

$$y' = ay.$$

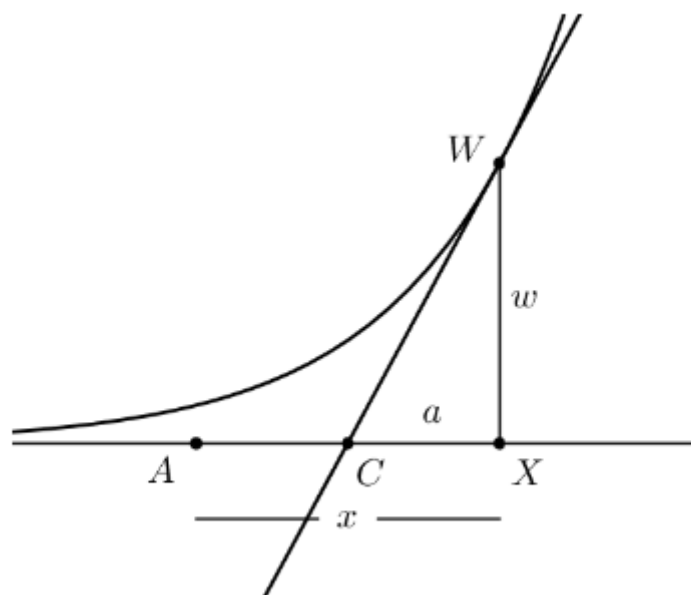
Leibniz, invece, procedette nel modo seguente: Come riportato in Figura 2.36, sia  $AX = x$  e  $XW = w$ . Leibniz fissò  $CX = a$  come richiesto dal problema. Ottenne così la relazione

$$w : a = dw : dx. \quad (2.6)$$

Fissato il differenziale  $dx = b$  costante, ad una successione di ascisse  $x_1, x_2, \dots, x_n$  per cui valga  $x_{k+1} - x_k = dx = b$  fece corrispondere una successione di ordinate  $w_1, w_2, \dots, w_n$  tale che, per conseguenza di (2.6),

$$w_k = \frac{a}{b}(w_{k+1} - w_k)$$

<sup>11</sup>Immagine presa da [http://www.science.unitn.it/~fontanar/downloads/Lezione\\_08.pdf](http://www.science.unitn.it/~fontanar/downloads/Lezione_08.pdf).

Figura 2.36: Problema di De Beaune.<sup>11</sup>

ottenne

$$\frac{w_{k+1}}{w_k} = \frac{a+b}{a}.$$

Cioè, alla successione delle ascisse in progressione aritmetica corrispondeva una successione di ordinate in progressione geometrica; tale proprietà individuò la curva logaritmica, perciò, per una determinata costante  $k$ , si ebbe

$$x = k \log w.$$

## 2.6 La geometria proiettiva e la teoria delle curve nella geometria algebrica

Già durante l'antichità la prospettiva era un elemento presente, soprattutto nei disegni che definivano gli ambienti architettonici. Nel corso del tempo, la rappresentazione dello spazio divenne sempre più rappresentazione ottica, per dare una sensazione di tridimensionalità alle opere d'arte. Dopo un interesse prettamente artistico durante la prima parte del Rinascimento da parte di pittori e architetti come Brunelleschi, Piero della Francesca e Alberti, nel XVI secolo si iniziò ad apprezzare la prospettiva dal punto di



vista geometrico, permettendo lo sviluppo della geometria proiettiva. In tale contesto, risultarono di particolare importanza le opere di Girard Desargues (1591-1661) e Blaise Pascal (1623-1662).

Desargues, nell'opera *Brouillon Project*, definì le coniche come proiezioni del cerchio, analizzandone le proprietà di tipo proiettivo. Le coniche vennero generate tenendo presente le seguenti situazioni. Se una retta che ha un punto fisso si muove lungo una circonferenza, si hanno due casi possibili:

1. Il punto fisso è nel piano della circonferenza: allora la retta descrive un fascio che può essere proprio o improprio a seconda che il punto fisso sia a distanza finita o infinita.
2. Il punto fisso è fuori dal piano della circonferenza: allora otterremo una figura solida detta cono se il punto fisso è a distanza finita, cilindro se è a distanza infinita.

La geometria proiettiva venne in seguito formalizzata e usata nelle ricerche dei matematici che gettarono le basi della geometria algebrica, sviluppata a partire dalla prima metà dell'Ottocento. Essa verte sullo studio dei polinomi e delle loro radici. Vennero sviluppati i concetti di varietà algebrica e luoghi di zeri di polinomi. Le curve algebriche vennero così definite a partire dalla varietà come descritto nella Definizione 2.

Un importante passo avanti nella teoria delle curve si ebbe con il Teorema di Bézout, risalente al 1779, che prende il nome dall'omonimo matematico Etienne Bézout (1730-1783).

**Teorema 2.6.1** (di Bézout). *Il numero di intersezioni di una curva di grado  $n$  con una curva di grado  $m$  che non abbiano componenti in comune è  $nm$ , considerando la molteplicità e anche le intersezioni complesse.*

### 2.6.1 Contributi matematici di Plücker

Julius Plücker (1801-1868) fu un matematico e fisico tedesco che contribuì all'ampliamento della teoria delle curve. Tra le scoperte a lui attribuite, vi fu l'introduzione delle coordinate omogenee.

**Definizione 13.** *Chiamiamo **coordinate omogenee** di un punto nel piano  $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  una qualsiasi terna ordinata  $\tilde{p} = (x', y', w') \in \mathbb{R}^3$  tale che  $w' \neq 0$ ,  $\frac{x'}{w'} = x$  e  $\frac{y'}{w'} = y$ .*

Le coordinate omogenee permettono di rappresentare punti all'infinito e consentono di esprimere tutte le trasformazioni di coordinate geometriche in

forma matriciale.

Venne, inoltre, sviluppato il concetto di polarità. Una polarità consiste nell'accoppiare in un certo modo tra loro punti e rette. Se un punto  $P$  ed una retta  $r$  sono accoppiati, diremo che  $P$  è il *polo* di  $r$  e che  $r$  è la *polare* di  $P$ . Inizialmente la polarità venne riferita alla circonferenza, come rappresentato in Figura 2.37: se il punto  $P$  è esterno alla circonferenza, la corrispondente retta polare è quella che congiunge i due punti di contatto delle tangenti condotte da  $P$  alla circonferenza. Se la retta taglia la circonferenza in due punti, il polo risulta l'intersezione delle due tangenti alla circonferenza nei punti di intersezione con la polare.

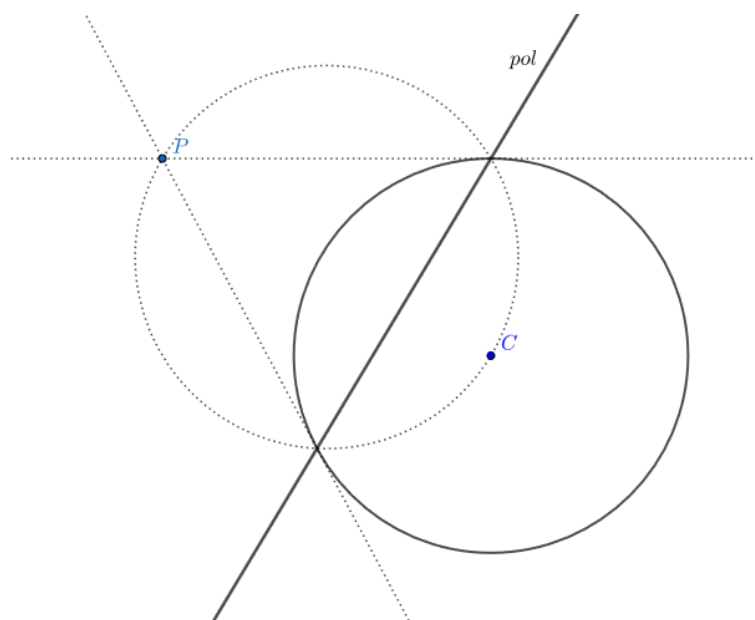


Figura 2.37: Retta polare e polo.

Per estendere la definizione di polare a un punto interno alla circonferenza e di polo a una retta non secante, si utilizzano le seguenti proprietà:

- le polari dei punti su una retta data passano tutte per un punto, che risulta il polo della retta;
- i poli delle rette di un fascio per un punto dato stanno tutti su una retta, che è la polare del punto;
- il polo della polare di un punto è il punto stesso;
- la polare del polo di una retta è la retta stessa.

La polare di un punto  $P$  interno alla circonferenza si trova nel modo seguente. Prendiamo in considerazione due rette  $r$  e  $s$  che si intersecano in  $P$ : esse risultano rette secanti alla circonferenza. Siano dunque  $R$  ed  $S$  i rispettivi poli: allora la polare di  $P$  è la congiungente di  $R$  con  $S$ . Ragionando in maniera analoga, sia  $t$  una retta esterna alla circonferenza e siano  $R$  e  $S$  due suoi punti, esterni alla circonferenza. Siano  $r$  ed  $s$  le rispettive rette polari e sia  $P$  l'intersezione di  $r$  ed  $s$ :  $P$  risulta il polo di  $t$ . Tale metodo è rappresentato in Figura 2.38.

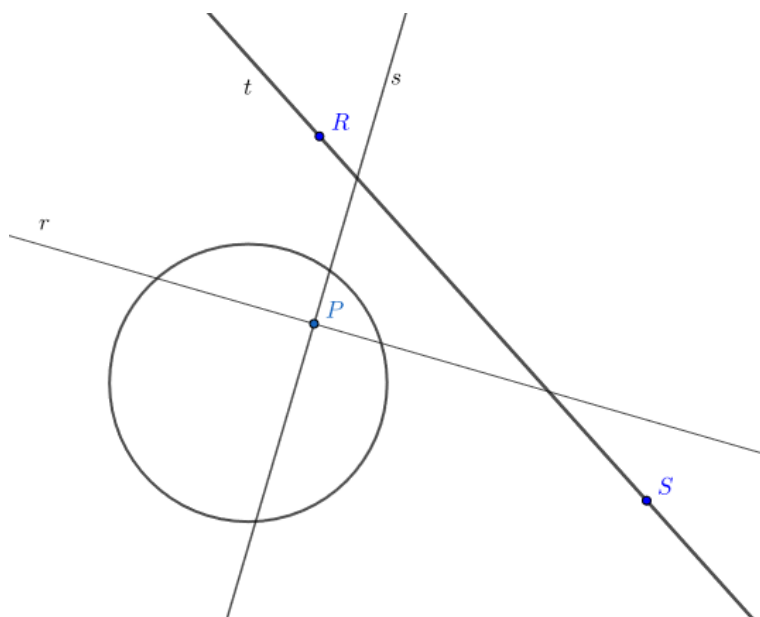


Figura 2.38: Retta polare e polo: secondo caso.

Il caso limite corrisponde al punto  $P$  sulla circonferenza: la retta polare corrisponde alla tangente alla circonferenza passante per quel punto. Analogamente, se  $t$  è una retta tangente alla circonferenza, il suo polo è il punto di intersezione tra la tangente e la circonferenza stessa.

Dal punto di vista analitico, possiamo scrivere la retta polare di una conica nel modo seguente. Esprimendo l'equazione di una conica in forma omogenea  $f(x_0, x_1, x_2) = 0$ , l'equazione della retta polare in un punto  $P_0 = (x_0, x_1, x_2)$  risulta

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} \Big|_P x_0 + \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_P x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_P x_2 = 0.$$

Ampliando il concetto alle curve algebriche piane, data una curva  $C$  di grado  $n$ , la polare di un punto  $P = (x_0, x_1, x_2)$  è una curva di grado  $n - 1$  di equazione:

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} \Big|_P x_0 + \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_P x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_P x_2.$$

A tale curva appartengono i punti di intersezione delle rette tangenti alla curva  $C$  passanti per  $P$  con la curva  $C$ .

Si conclude qui l'analisi storica delle curve piane, sebbene sia chiaro che è stata solo descritta una minima parte di tutti gli studi affrontati nel corso dei secoli. Non solo le curve descritte nel corso del capitolo sono state studiate in modo più approfondito di quanto riportato, ma ne sono state analizzate molte altre qui non menzionate. Inoltre, gli studi non si sono fermati ai contributi di Plücker: a partire da essi, si è proseguito con l'approfondimento delle curve seguendo un punto di vista proiettivo. Vanno inoltre, ricordati i numerosi studi sulle curve non algebriche, qui solo accennati.



## Capitolo 3

# Progettazione dell'attività

In questo capitolo verrà descritto un percorso laboratoriale sulle curve che utilizza le macchine matematiche e il software Geogebra destinato a studenti di scuola secondaria di secondo grado. Dopo aver analizzato gli obiettivi e le finalità dell'attività, si procederà con la descrizione del materiale costruito per il percorso, concentrandosi in particolare sulle schede che guidano l'attività con le macchine matematiche. Inoltre, verrà descritta la costruzione di alcune delle macchine matematiche che sono state realizzate a posta per il percorso. Il percorso laboratoriale è stato sperimentato nell'agosto 2022 presso il Liceo Augusto Righi di Bologna, durante un corso estivo Scuola Estate per studenti di scuola secondaria di secondo grado. Nel capitolo successivo verrà descritta la sperimentazione e verranno analizzati i dati emersi.

### 3.1 Obiettivi dell'attività

L'attività consiste in un percorso laboratoriale che utilizza alcune macchine matematiche, strumenti di legno che permettono di costruire curve mediante il movimento degli elementi che le costituiscono. Esse consentono di rafforzare negli studenti intuizione e immaginazione e metterli in contatto diretto con fatti geometrici di tipo nuovo o inconsueto attraverso il movimento delle macchine (si veda Capitolo 1). Inoltre, le macchine sono oggetti storici: a partire dall'uso della riga e del compasso degli antichi greci, nel corso dei secoli vennero progettati diversi tracciatori di curve, che incorporavano caratteristiche delle curve studiate all'epoca. Gli studenti sono così naturalmente portati ad immergersi in una dimensione storica, che può suscitare curiosità ed interesse.

Il progetto, pensato per una scuola estiva aperta a tutti gli studenti di scuola secondaria, doveva essere rivolto sia a ragazzi che avevano già studiato le

coniche in classe, sia a studenti che avevano poche conoscenze sulle curve. Gli obiettivi erano, dunque, molteplici: per i ragazzi che possedevano già la nozione delle coniche doveva essere fonte di approfondimento, mentre per i ragazzi più giovani doveva fungere da infarinatura e introduzione all'argomento delle curve algebriche, avvicinandoli alla definizione come luogo geometrico e alla descrizione mediante l'equazione cartesiana. Nelle Indicazioni Nazionali, infatti, vi è l'obiettivo di comprendere il significato di luogo geometrico, studiandone alcuni «esempi significativi», accompagnato dalla rappresentazione geometrica nel piano cartesiano, come visto nella Sezione 1.1.

Trattandosi, inoltre, di un corso estivo, si è cercato di dare un'impostazione più informale rispetto alle lezioni in classe. C'è stato il tentativo di incuriosire e stupire, mostrando anche aspetti dell'argomento che solitamente non vengono affrontati durante l'anno scolastico. Per fare sì che gli studenti non associassero le curve alle sole coniche, si è deciso di lavorare sul concetto di curva includendo anche lo studio di curve di grado superiore. Per questo motivo, oltre all'utilizzo di macchine che disegnano le coniche, prese in prestito dal Laboratorio delle Macchine Matematiche di Bologna<sup>1</sup>, sono state costruite ad hoc macchine che permettessero di disegnare le seguenti curve: la concoide di Nicomede (si veda Definizione 9), la lemniscata di Bernoulli (si veda Definizione 12) e la curva kappa (si veda Sezione 2.3).

È stato progettato così un laboratorio in cui gli studenti, divisi in gruppi da due o da tre, potessero studiare autonomamente le macchine. Attraverso la manipolazione di oggetti concreti, si è deciso di stimolare i ragazzi ad una partecipazione attiva e di guidarli ad una riflessione che a partire dalle loro conoscenze pregresse li portasse ad arrivare a nuove scoperte.

Altro elemento importante del percorso è stato l'utilizzo di Geogebra. Come riportato nel Capitolo 1, i software come Geogebra permettono di comprendere meglio la differenza tra disegno e figura geometrica. L'utilizzo delle macchine rende chiaro agli studenti tutti i limiti e i vincoli fisici delle stesse, spingendo i ragazzi stessi alla ricerca di un metodo per costruire le curve in maniera più precisa: attraverso il software le approssimazioni sono più precise e gli studenti riescono ad analizzare più approfonditamente aspetti della curva come l'equazione cartesiana, la definizione come luogo geometrico e le caratteristiche qualitative.

---

<sup>1</sup>Per prendere in prestito le macchine, si può consultare il sito <https://www.liceorighibologna.it/pagine/laboratorio-macchine-matematiche>.

## 3.2 Materiali utilizzati

Le macchine matematiche sono state un elemento fondamentale del progetto. Come detto sopra, in parte sono state prese in prestito dal Laboratorio delle Macchine Matematiche di Bologna e in parte sono state costruite da me. In particolare, sono stati utilizzati un parabolografo di Cavalieri (si veda Definizione 7), un ellissografo di Proclo (si veda Definizione 7), un iperbolografo a filo (si veda Definizione 7), una macchina che disegna la conoide di Nicomede (si veda Definizione 9), una macchina che disegna la curva kappa (si veda Sezione 2.3) e una macchina che disegna la lemniscata di Bernoulli (si veda Definizione 12). Nella Sezione 3.2.1 si descriverà il processo di costruzione, i materiali e gli strumenti usati per la realizzazione delle macchine. Come supporto all'attività, sono state progettate delle schede guida che aiutassero nel ragionamento, riportate nell'Appendice A e descritte nella Sezione 3.2.2; siccome hanno la stessa struttura schematica e si differenziano solo nei contenuti a seconda del tipo di macchina, non si analizzeranno tutte le schede, ma verranno riportate le domande comuni ed eventualmente sottolineati solo aspetti interessanti o differenze peculiari di alcune schede.

### 3.2.1 Le macchine matematiche

Di seguito, si espone la costruzione delle macchine utilizzate durante il percorso. Le schede illustrative di tutte le macchine che sono state utilizzate durante l'attività sono esposte in Appendice B.

#### L'ellissografo di Proclo

Materiale: Base di legno di  $38.5 \times 37 \times 0.4$  cm, quattro listelli di  $9.5 \times 0.6 \times 0.5$  cm, quattro listelli di  $9 \times 0.6 \times 0.5$  cm, un listello di  $29.5 \times 2 \times 0.5$  cm e due cilindri di legno con un diametro di 0.6 cm e altezza 2 cm.

Strumenti di lavoro: seghetto, colla vinilica, trapano e carta abrasiva.

Costruzione:

- Con i listelli di  $9.5 \times 0.6 \times 0.5$  cm e  $9 \times 0.6 \times 0.5$  cm si crea a centro della base di legno un binario di 0.7 cm a forma di croce con braccia di dimensioni uguali (lunghe 20.2 cm).



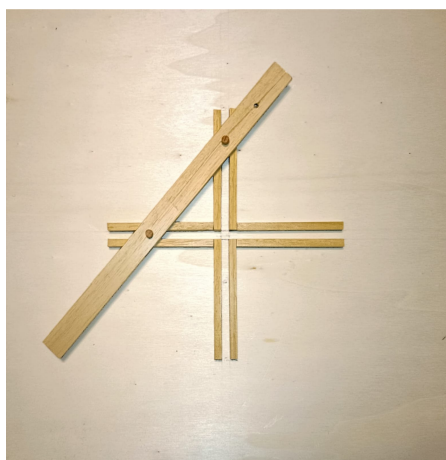


Figura 3.1: Ellissografo di Proclo.

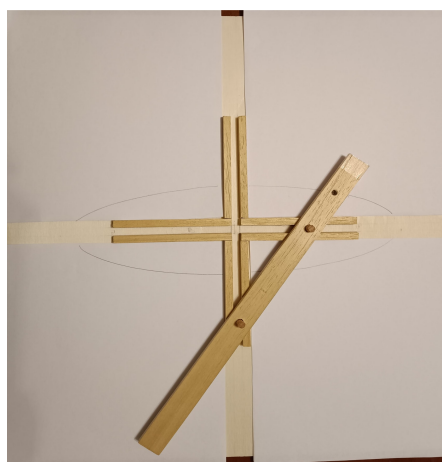


Figura 3.2: L'ellisse realizzata dalla macchina.

- Nel listello lungo  $29.5 \times 2 \times 0.5$  cm si creano tre fori: uno a distanza di 3.5 cm dal bordo e un diametro sufficiente a far passare una mina di grafite (ad esempio 0.4 cm), uno a distanza 7.5 cm dal bordo con diametro di 0.6 cm e un ultimo a distanza 17 cm dal bordo con diametro di 0.6 cm.
- Nei fori da 0.6 cm di diametro si inseriscono i due cilindri in modo tale che questi riescano a scorrere all'interno dei binari precedentemente costruiti.
- La carta abrasiva serve per levigare superfici eccessivamente ruvide. Il seghetto serve per tagliare i listelli delle misure necessarie.

L'ellissografo di Proclo è pronto: si inserisce un foglio sopra la base di legno accanto ai binari e si fanno scorrere i due cilindri, uno lungo un binario, l'altro lungo il secondo binario, come si osserva in Figura 3.2.

### L'iperbolografo a filo

Materiale: Base di legno di  $40 \times 38 \times 0.4$  cm, due listelli di  $25 \times 2 \times 0.5$  cm, due corde di lunghezza 20 cm, due viti del diametro di 0.4 cm.

Strumenti di lavoro: seghetto, trapano e carta abrasiva.

Costruzione:

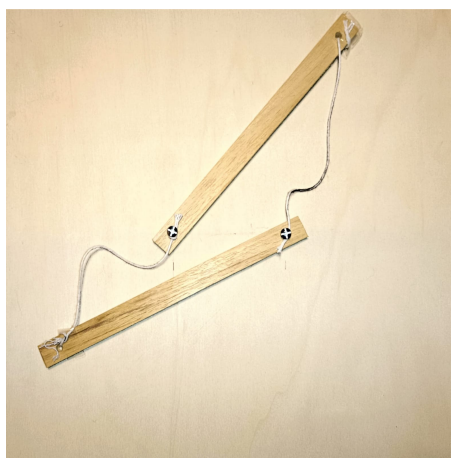


Figura 3.3: Iperbolografo a filo.

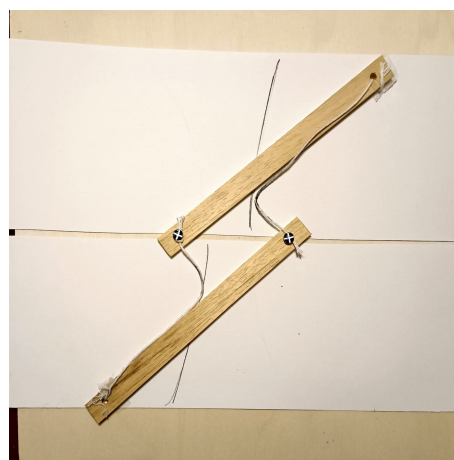


Figura 3.4: L'iperbole realizzata dalla macchina.

- Si praticano due fori al centro della base di legno a distanza di 20 cm l'uno dall'altro.
- Si creano due buchi per ogni listello, uno a distanza 1.5 cm dal bordo con diametro 0.4 cm e uno a distanza 1.5 cm dal bordo opposto con diametro 0.6 cm.
- Nei fori dal diametro di 0.6 cm, in entrambe le aste si inserisce una vite; le due viti vengono inserite successivamente nei fori della base di legno e fissate con un bullone, in modo che i listelli possano ruotare.
- Attorno alle viti viene legato un estremo delle corde; l'altro estremo viene annodato attorno al foro ancora libero dell'altro listello, in modo che le corde risultino di lunghezza 18 cm.  
**Attenzione:** la lunghezza delle corde deve essere minore della lunghezza dei listelli.
- La carta abrasiva serve per levigare superfici eccessivamente ruvide. Il seghetto serve per tagliare i listelli delle misure necessarie.

L'iperbolografo a filo è pronto. Si inserisce un foglio sopra la base di legno sotto i due listelli e si fanno ruotare i listelli mantenendo con la punta della matita i fili tesi accostati ad essi, come si vede in Figura 3.4.

## Macchina per la lemniscata di Bernoulli

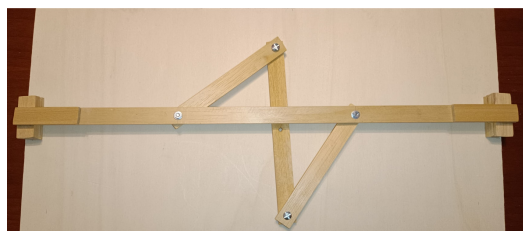


Figura 3.5: Macchina che realizza la lemniscata di Bernoulli.

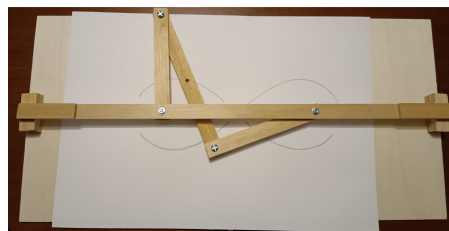


Figura 3.6: La lemniscata realizzata dalla macchina.

Materiale: Base di legno di  $56 \times 28 \times 0.4$  cm, un listello di  $56 \times 2 \times 0.5$  cm, due listelli di  $16 \times 2 \times 0.5$  cm, un listello di  $22 \times 2 \times 0.5$  cm, otto listelli di  $5 \times 2 \times 0.5$  cm e quattro viti del diametro di 0.4 cm.

Strumenti di lavoro: seghetto, colla vinilica, trapano e carta abrasiva.

Costruzione:

- Sulla base di legno si incollano, al centro di uno dei due bordi di lunghezza 28 cm, quattro listelli da  $5 \times 2 \times 0.5$  cm uno sull'altro. In maniera analoga si procede nel bordo opposto. Essi fungeranno da sostegno.
- Si deve costruire un antiparallelogramma. Sul listello di  $56 \times 2 \times 0.5$  cm si praticano due fori dal diametro di 0.6 cm a distanza di 18 cm dai due bordi, in modo che tra loro distino 20 cm.
- In ognuno dei due listelli da  $16 \times 2 \times 0.5$  cm si praticano due fori dal diametro di 0.6 cm a 1 cm di distanza dai bordi.
- Nel listello di  $22 \times 2 \times 0.5$  cm si praticano due fori dal diametro di 0.6 cm a 1 cm di distanza dai bordi. In questo modo si sono costruite due sezioni lunghe 20 cm l'una e due sezioni lunghe 14 cm l'una.  
**Attenzione:** Nell'antiparallelogramma che si sta costruendo la lunghezza del lato maggiore deve essere circa il prodotto tra la lunghezza del lato minore e  $\sqrt{2}$ : in questo caso risulta  $14 \cdot \sqrt{2} \simeq 20$ .
- Si pratica un foro al centro del listello di  $22 \times 2 \times 0.5$  cm al centro con un diametro sufficiente a far passare una mina di grafite (ad esempio 0.4 cm).

- Si dispongono i listelli come in Figura 3.5 e si inseriscono le viti nei fori, fissandole mediante dei bulloni in modo che i listelli possano ruotare.
- Si fissa il listello di  $56 \times 2 \times 0.5$  cm sul sostegno costruito precedentemente.
- La carta abrasiva serve per levigare superfici eccessivamente ruvide. Il seghetto serve per tagliare i listelli delle misure necessarie.

La macchina per la lemniscata di Bernoulli è pronta. Si inserisce un foglio sopra la base di legno sotto i listelli, si infila la mina nel foro e si segue il moto condizionato dalle aste, come si osserva in Figura 3.6.

### Macchina per la curva kappa

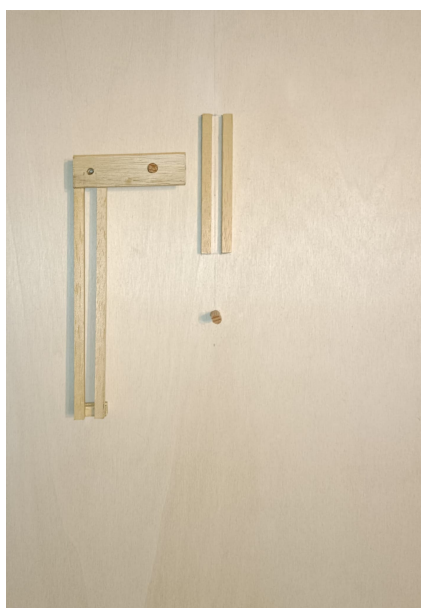


Figura 3.7: Macchina che realizza la curva kappa.

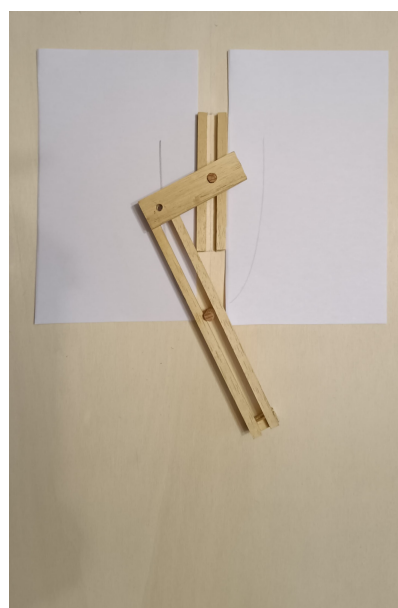


Figura 3.8: La curva kappa realizzata dalla macchina.

Materiale: Base di legno di  $40 \times 27 \times 0.4$  cm, due listelli di  $9 \times 0.6 \times 0.5$  cm, due listelli di  $16.5 \times 0.6 \times 0.5$  cm, un listello di  $7 \times 2 \times 0.5$ , tre listelli di  $2 \times 0.6 \times 0.5$  cm, due cilindri di legno con un diametro di 0.6 cm e altezza 2 cm.

Strumenti di lavoro: seghetto, colla vinilica, trapano e carta abrasiva.

Costruzione:

- Al centro della base di legno si incolla un cilindro di legno.
- Con i listelli di  $9 \times 0.6 \times 0.5$  cm si crea un binario di 0.7 cm a distanza 4 cm dal cilindro fissato, incollando i listelli nella parte lunga della base di legno.
- Con i listelli di  $16.5 \times 0.6 \times 0.5$  cm si crea un binario di 0.7 cm, che si fissa mediante due listelli di  $2 \times 0.6 \times 0.5$  cm incollati uno sull'altro e in un estremo del binario. Nell'altro estremo si incolla il terzo listello di quella dimensione.
- Nel listello si creano due fori, uno a 1 cm dal bordo con un diametro di 0.4 cm e uno a 2 cm dal bordo opposto con un diametro di 0.6 cm.
- Si inserisce il secondo cilindro nel foro di 0.6 cm di diametro. Si incolla il bordo del listello con il foro di 0.4 cm nel bordo dei binari con un listello.
- La carta abrasiva serve per levigare superfici eccessivamente ruvide. Il seghetto serve per tagliare i listelli delle misure necessarie.

La macchina per la curva kappa è pronta. Si inserisce un foglio sopra la base di legno accanto ai binari fissati, si infila la mina nel foro e si fa scorrere il cilindro lungo i binari, inserendo il cilindro fisso nei binari liberi di muoversi, come si osserva in Figura 3.8.

### Macchina per la concoide di Nicomede



Figura 3.9: Macchina che realizza la concoide di Nicomede.

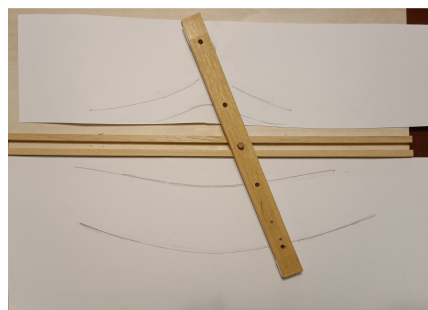


Figura 3.10: La concoide di Nicomede realizzata dalla macchina.

Materiale: Base di legno di  $40 \times 27 \times 0.4$  cm, due listelli di  $40 \times 0.6 \times 0.5$  cm, un listello di  $25 \times 2 \times 0.5$  cm, due listelli di  $25 \times 0.6 \times 0.5$  cm, due cilindri di legno con un diametro di 0.6 cm e altezza rispettivamente 2 cm e 1.5 cm.

Strumenti di lavoro: seghetto, colla vinilica, trapano e carta abrasiva.

Costruzione:

- Al centro della base di legno si costruisce un binario di distanza 0.7 cm con i listelli di  $40 \times 0.6 \times 0.5$  cm.
- A distanza 0.4 cm dal binario, lungo la mediana della base, si incolla il cilindro alto 1.5 cm.
- Sotto al listello di  $25 \times 2 \times 0.5$  cm, si costruisce un binario con i listelli di  $25 \times 0.6 \times 0.5$  cm di distanza 0.8 cm.
- Nell'asta creata si praticano quattro fori, uno a 2.5 cm dal bordo con un diametro di 0.4 cm, uno a 8.5 cm dal bordo con un diametro di 0.4 cm, uno a 12.5 cm dal bordo con un diametro di 0.6 cm, uno a 16.5 cm dal bordo con un diametro di 0.4 cm e uno a 22.5 cm dal bordo con un diametro di 0.4 cm.  
**Attenzione**: la distanza del primo foro dal terzo deve essere uguale alla distanza del quinto foro dal terzo, e analogamente deve avvenire per il secondo e il quarto foro.
- Si inserisce il secondo cilindro nel foro centrale.
- La carta abrasiva serve per levigare superfici eccessivamente ruvide. Il seghetto serve per tagliare i listelli delle misure necessarie.

La macchina per la conoide di Nicomede è pronta. Si inserisce un foglio sopra la base di legno accanto ai binari fissati, si infila la mina nei quattro fori e si fa scorrere il cilindro lungo i binari, inserendo il cilindro fisso nei binari liberi di muoversi, come si osserva in Figura 3.10.

### 3.2.2 Schede guida

Ogni scheda, presente in Appendice A, prende in considerazione una macchina specifica. In particolare, la scheda A si riferisce al parabolografo di Cavalieri, la scheda B all'ellissografo di Proclo, la scheda C all'iperbolografo

a filo, la scheda D alla lemniscata di Bernoulli, la scheda E alla curva kappa, la scheda F alla conoide di Nicomede.

Le schede sono suddivise in 6 domande, disposte nei fogli in modo che possano essere consegnate in giorni diversi e in momenti diversi dell'attività. Si possono così suddividere le schede in quattro parti, esposte di seguito.

### Fase esplorativa

La prima domanda è enunciata nel modo seguente:

- 1) **Fate un disegno schematico della macchina e descrivetela in ogni suo elemento. Come pensate si possa utilizzare? Fate delle ipotesi sul suo funzionamento e riportatele sul foglio.**

Questo quesito permette un'esplorazione della macchina libera e non vincolata da richieste particolari. Tale domanda è analoga nelle schede di tutte le macchine.

Il secondo quesito, posto in un secondo foglio, spiega il funzionamento della macchina e stimola i primi ragionamenti sulla figura realizzata. In questa domanda non viene richiesto di utilizzare un linguaggio formale e specifico, ma di usare le parole che gli studenti trovano più consone per descrivere la curva. In questo modo il docente è in grado di valutare le conoscenze pregresse dei ragazzi e la loro capacità di formalizzare ciò che osservano. A titolo di esempio, si riporta di seguito la domanda relativa alla curva kappa:

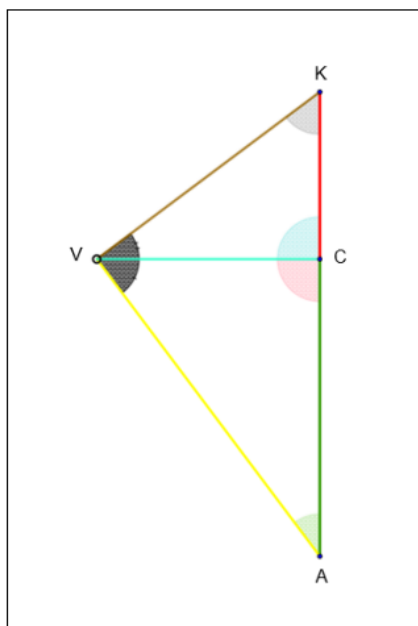
- 2) **Ponendo la matita in corrispondenza del vertice che forma un angolo retto, fate scorrere il punto vincolato a muoversi lungo un segmento. Descrivete la curva tracciata.**

### Costruzione del luogo geometrico

La seconda parte della scheda aiuta gli studenti ad analizzare in maniera più approfondita la macchina che hanno superficialmente esplorato in precedenza e la curva che essa disegna. In particolare, lo scopo è quello di arrivare

a capire la definizione della curva come luogo geometrico.

Il terzo quesito è accompagnato da una figura schematica della macchina. La domanda proposta permette di richiamare le riflessioni fatte nella fase precedente. A titolo di esempio, si riporta di seguito la domanda relativa al parabolografo di Cavalieri:



- 3) Pensate che possa essere una curva che conoscete? Come giustifichereste la vostra risposta?

La quarta domanda, infine, è composta da una tabella da compilare. Con l'aiuto della scheda, gli studenti hanno la possibilità di esplorare con maggiore attenzione e profondità la macchina, analizzandone le singoli componenti e il funzionamento attraverso delle misurazioni mediante goniometro e righello, fino ad arrivare alla definizione della curva come luogo geometrico. Si propone come esempio la domanda relativa alla curva kappa:

- 4) Che cosa rimane costante e cosa no durante il movimento della macchina?  
Completate la seguente tabella: se ritenete che l'oggetto non vari, misuratelo e scrivete il valore nella seconda colonna. Se invece pensate che vari, riportate nella prima colonna almeno due valori diversi dello stesso oggetto.



|                 | VARIA | NON VARIA |
|-----------------|-------|-----------|
| 1. Lunghezza QP |       |           |
| 2. Lunghezza PO |       |           |
| 3. Lunghezza QO |       |           |
| 4. Angolo QQP   |       |           |
| 5. Angolo QOP   |       |           |
| 6. Angolo QPO   |       |           |

Quale potrebbe essere la definizione di tale curva come luogo geometrico?

Il parabolografo di Cavalieri non è costruito sfruttando la definizione usuale come luogo geometrico (si veda Definizione 7); per questo, solo nella scheda guida relativa a questa macchina, si è deciso di aggiungere alla quarta domanda un suggerimento per ricavare la definizione cercata:

**Dopo aver calcolato la distanza tra il punto A e il bordo della macchina, ponete sull'asse su cui giace il segmento AC un segno in corrispondenza del punto che si trova alla stessa distanza da A e chiamatelo F. Misurate ora il segmento VF.**

**Quale potrebbe essere la definizione della curva come luogo geometrico?**

In questo modo si arriva ad osservare che la distanza del punto  $V$  dalla retta presa in considerazione e la distanza del punto  $V$  dal punto  $F$  ricavato è uguale.

### Costruzione dell'equazione cartesiana

Le due domande successive riguardano la ricerca dell'equazione cartesiana della curva attraverso l'analisi delle caratteristiche della macchina matematica. La notazione utilizzata nelle domande richiama quella utilizzata nella figura della domanda 3).

Innanzitutto, la prima domanda pone l'attenzione sul sistema di riferimento: sono dati alcuni suggerimenti su dove porre gli assi cartesiani e l'origine, in

modo da ricavare con più facilità l'equazione della curva. A titolo di esempio è riportata la domanda relativa all'ellissografo di Proclo:

- 5) Per ricavare l'equazione cartesiana, cerchiamo un sistema di riferimento opportuno. Quale segmento della macchina potrebbe giacere sull'asse delle ordinate? Quale segmento potrebbe giacere sull'asse delle ascisse?

Di seguito sono esposte le scelte più pratiche per quanto riguarda il sistema di riferimento delle diverse curve.

**Il parabolografo di Cavalieri:** conviene porre l'ipotenusa del triangolo rettangolo che compone la macchina sull'asse delle ordinate e l'origine degli assi nel vertice della parabola.

**L'ellissografo di Proclo:** conviene porre i due segmenti di legno che compongono la macchina sugli assi di riferimento e far corrispondere l'origine all'intersezione tra i due segmenti.

**L'iperbolografo a filo:** conviene porre i perni sull'asse delle ascisse e l'origine degli assi in corrispondenza del punto medio del segmento che ha come estremi i due perni.

**La lemniscata di Bernoulli:** conviene porre l'asse delle ascisse in corrispondenza del segmento che unisce i due perni e l'origine degli assi nel punto medio del suddetto segmento.

**La curva kappa:** conviene porre l'origine degli assi nel punto fisso  $O$  della macchina e far giacere il segmento lungo cui scorre  $Q$  sull'asse delle ordinate.

**La concoide di Nicomede:** conviene porre l'origine degli assi in corrispondenza del punto fisso  $O$  e l'asse delle ordinate parallela alla retta  $s$ .

La domanda successiva permette di ricavare l'equazione cartesiana. Le lettere presenti nei quesiti richiamano le notazioni date nel disegno schematico della macchina presente nella domanda 3) delle schede. A titolo di esempio è riportata la domanda relativa all'ellissografo di Proclo:

- 6) Considerate i due triangoli formati da un punto  $P$  della curva, i perni e la proiezione di  $P$  sull'asse  $x$  e la proiezione di  $P$  sull'asse  $y$ . Partendo da essi, quale equazione cartesiana si riesce a ricavare?

Di seguito, sono esposti i ragionamenti necessari per ricavare l'equazione delle curve nel sistema di riferimento descritto sopra.

### Il parabolografo di Cavalieri:

La domanda suggerisce di soffermarsi sul triangolo  $AVK$ .

Il quesito necessita di richiamare lo schema compilato dai ragazzi nella domanda numero 4). Infatti, a partire dalle misurazioni, si può osservare che il triangolo  $AVK$  è rettangolo, perciò si può sfruttare il secondo teorema di Euclide. Dal momento che alcuni studenti potrebbero non essere a conoscenza del teorema, le misurazioni potrebbero aiutare a dedurre i risultati cercati. Infatti, mediante il goniometro si osserva che gli angoli  $V\hat{K}C$  e  $A\hat{V}C$  sono congruenti, così come  $V\hat{A}C$  e  $C\hat{V}K$ . Questa conclusione si può ricavare anche mediante il seguente ragionamento: il segmento  $VC$  corrisponde all'altezza relativa all'ipotenusa del triangolo rettangolo. Osservando che l'angolo  $V\hat{K}C$  è uguale a  $\pi - \frac{\pi}{2} - V\hat{A}K$  e analogamente l'angolo  $A\hat{V}C$  è uguale a  $\pi - \frac{\pi}{2} - V\hat{A}K$ , si può concludere che i due angoli sono congruenti. Si ragiona allo stesso modo per gli angoli  $V\hat{A}C$  e  $C\hat{V}K$ . Si osserva così che i triangoli  $VCK$ ,  $VCA$  e  $AVK$  sono simili in quanto aventi i tre angoli corrispondenti congruenti. Questo significa che i lati corrispondenti sono proporzionali. In particolare si ottiene il primo teorema di Euclide:

$$CK : VK = VK : AK$$

dai triangoli  $VCK$  e  $AVK$ , e il secondo teorema di Euclide:

$$VC : CK = AC : VC$$

dai triangoli  $VCK$  e  $VCA$ .

Si può ottenere così

$$VC^2 = AC \cdot CK.$$

$VC$  è variabile. Si può porre così  $VC = x$  (oppure  $VC = y$ ). Analogamente, si può porre  $AC = y$  (oppure  $AC = x$ ). Il segmento  $CK$ , invece, rimane costante. Perciò, si ottiene

$$x^2 = y \cdot k$$

(oppure  $y^2 = x \cdot k$ ).

### L'ellissografo di Proclo:

La domanda suggerisce di considerare i due triangoli  $BPP_x$  e  $APP_y$ , che sono simili in quanto aventi gli angoli corrispondenti congruenti. Vale la seguente relazione:

$$PP_y : BP_x = AP : BP$$

da cui

$$BP_x = \frac{BP \cdot PP_y}{AP}.$$

Inoltre, vale

$$BP_x = \sqrt{PB^2 - PP_x^2}.$$

Essendo costanti, sia  $b$  il segmento  $PB$  e  $a$  il segmento  $PA$ . Si può porre, inoltre,  $PP_x = y$  e  $PP_y = x$ . Perciò, Perciò

$$\sqrt{b^2 - y^2} = \frac{bx}{a}$$

$$b^2 - y^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2}$$

$$\frac{b^2 x^2}{a^2} + y^2 = b^2.$$

Dividendo entrambi i membri per  $b^2$ , si ottiene l'equazione canonica dell'ellisse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

### L'iperbolografo a filo:

La domanda suggerisce considerare due segmenti  $PF_1$  e  $PF_2$ , a fronte delle misurazioni fatte nella parte precedente della scheda. In particolare, per la definizione di iperbole come luogo geometrico, si ha

$$PF_1 - PF_2 = \text{cost.}$$

Partendo dalla definizione, si considerino i triangoli  $PF_1P_x$  e  $PF_2P_x$ , dove  $P_x$  è la proiezione di  $P$  sull'asse  $x$ . Essi sono triangoli rettangoli, per cui si può applicare il teorema di Pitagora. Chiamata  $c$  la distanza di un perno

dall'origine, che rimane costante, e posto  $OP_x = x$ , dove  $O$  è l'origine degli assi, si ottiene

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(c-x)^2 + y^2} = \text{cost.}$$

La costante dell'equazione si ricava prendendo in considerazione il punto dell'iperbole che giace sull'asse  $x$  di coordinate  $(a, 0)$ . Dalla definizione di iperbole come luogo geometrico, si ricava

$$\text{cost} = c + a - (c - a)$$

$$\text{cost} = 2a.$$

Dunque, l'equazione precedente si può scrivere come

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(c-x)^2 + y^2}.$$

Elevando entrambi i membri al quadrato, si ottiene

$$x^2 + c^2 + 2xc + y^2 = 4a^2 + c^2 + x^2 - 2xc + y^2 + 4a\sqrt{(c-x)^2 + y^2}$$

$$4xc - 4a^2 = 4a\sqrt{(c-x)^2 + y^2}$$

$$xc - a^2 = a\sqrt{(c-x)^2 + y^2}.$$

Si elevano nuovamente al quadrato entrambi i membri:

$$x^2c^2 + a^4 - 2a^2cx = a^2c^2 + a^2x^2 - 2a^2cx + a^2y^2$$

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Siccome  $c > a$ , si può imporre  $c^2 - a^2 = b^2$ , così da poter scrivere

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

e dividendo entrambi i membri per  $a^2b^2$  si ottiene l'equazione canonica dell'iperbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

**La lemniscata di Bernoulli:**

L'equazione si ricava con un ragionamento analogo a quello applicato nella scheda per l'iperbolografo a filo, riportato nel paragrafo precedente. Posto il segmento che congiunge un perno con l'origine degli assi uguale ad  $a$ , e posto  $OM_x = x$ , valgono

$$AM = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$$

$$BM = \sqrt{(a-x)^2 + y^2}$$

da cui, sfruttando la definizione di lemniscata come luogo geometrico, si ottiene

$$\sqrt{(x+a)^2 + y^2} \sqrt{(a-x)^2 + y^2} = a^2$$

$$((x+a)^2 + y^2)((a-x)^2 + y^2) = a^4.$$

**La curva kappa:**

La domanda suggerisce di considerare il triangolo  $QPO$ . Dalle misurazioni fatte precedentemente, si osserva che il triangolo è rettangolo, perciò si possono usare i teoremi di Euclide. In particolare, chiamando  $C$  la proiezione di  $P$  sull'asse  $y$ , il segmento  $PC = x$  corrisponde all'altezza del triangolo sull'ipotenusa. Perciò, per il secondo teorema di Euclide, vale

$$PC^2 = QC \cdot OC$$

da cui

$$x^2 = QC \cdot y$$

indicando con  $y$  il segmento  $OC$ . Inoltre, si può applicare il teorema di Pitagora per il triangolo  $QPC$ :

$$QC = \sqrt{QP^2 - PC^2}$$

e, siccome il segmento  $QP$  è costante per definizione di curva kappa come luogo geometrico, possiamo scrivere

$$QC = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Si ottiene così

$$x^2 = \sqrt{a^2 - x^2} y$$

ed elevando entrambi i membri al quadrato, si ricava l'equazione della curva kappa:

$$x^4 = (a^2 - x^2)y^2.$$

### La concoide di Nicomede:

La domanda suggerisce di considerare i due triangoli  $OMH$  e  $OPP_x$ , dove  $P_x$  è la proiezione di  $P$  sull'asse  $x$ , a fronte delle misurazioni fatte in precedenza. Si osserva che essi sono simili, in quanto aventi i tre angoli ordinatamente congruenti (hanno infatti un angolo in comune e un angolo retto). Perciò vale la relazione

$$\frac{OM}{OH} = \frac{OP}{OP_x}.$$

Siccome  $OH$  è costante, si può porre  $OH = d$ , e, per come è stato posto il sistema di riferimento, si può scrivere  $OP_x = x$ . Perciò si ricava

$$OM = \frac{OP \cdot d}{x}.$$

Inoltre,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = OP = OM + MP$$

$$MP = k.$$

Dalle due relazioni si ottiene

$$\sqrt{x^2 + y^2} - k = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} \cdot d$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} \cdot d = k$$

$$x\sqrt{x^2 + y^2} - d\sqrt{x^2 + y^2} = kx$$

$$(x - d)\sqrt{x^2 + y^2} = kx$$

$$(x - d)^2(x^2 + y^2) = k^2x^2.$$

## Costruzione con Geogebra

L'ultimo foglio delle schede contiene alcuni suggerimenti per aiutare gli studenti nella costruzione delle curve su Geogebra. Inoltre, in ogni foglio è presente un link in cui si può vedere il file Geogebra della curva da me realizzato. A titolo di esempio, di seguito sono esposti i suggerimenti per costruire la concoide di Nicomede su Geogebra:

### COSTRUZIONE DELLA CONCOIDE DI NICOMEDE

<https://www.geogebra.org/m/nahqrsvd>

- Dopo aver fissato il punto  $O$  nell'origine degli assi e la retta  $s$  a piacimento, prendiamo un punto  $M$  vincolato a muoversi sulla retta  $s$ . Per trovare i punti della concoide, dobbiamo trovare i punti sulla retta  $OM$  che abbiano distanza costante da  $M$ . Come potreste rappresentare questo su Geogebra? Quale luogo geometrico potrebbe aiutarvi?

Di seguito, sono descritti i passaggi che permettono di costruire le macchine sul software.

**Il parabolografo di Cavalieri:** fissato il vertice  $A$  e la lunghezza  $k$ , si costruisce la semiretta che giace sulla retta  $x = 0$  con le ordinate positive; su di essa scorrerà il punto che permette di costruire la parabola. Sia  $C$  un punto sulla semiretta. Bisogna trovare il punto  $K$  che giaccia su  $x = 0$  e mantenga costante la distanza  $k$  fissata da  $C$ . Per farlo, si costruisce una circonferenza di centro  $C$  e raggio  $k$  (in alternativa, si può determinare il punto  $C$  ponendo  $0$  come coordinata delle ascisse e  $y(K) + k$  come coordinata delle ordinate). Il punto  $K$  cercato è l'intersezione tra la circonferenza e la semiretta costruite. Siccome gli elementi della macchina matematica formano un triangolo rettangolo, essa è inscritta nella circonferenza passante per  $A$ , per  $K$  e avente come centro il punto medio del segmento  $AK$ . I punti  $V$  e  $V_2$  corrispondono all'intersezione tra tale circonferenza e la perpendicolare alla semiretta nel punto  $C$ . Attraverso il comando "Mostra traccia", oppure con il comando "Luogo", i punti  $V$  e  $V_2$  disegnano la parabola cercata. Le istruzioni e la figura appaiono su Geogebra nel modo seguente:



|   |  |
|---|--|
| $A = (0, 0)$                            | $E = \text{PuntoMedio}(\text{Segmento}(A, K))$                         |
| $f : \text{Semiretta}(A, (0, 1))$       | $\rightarrow (0, 3)$   |
| $\rightarrow x = 0$                     | $d : \text{Circonferenza}(E, \text{Lunghezza}(\text{Segmento}(A, E)))$ |
| $C = \text{Punto}(f)$                   | $\rightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 9$                                      |
| $\rightarrow (0, 4)$                    | $g : \text{Perpendicolare}(C, f)$                                      |
| $k = 2$                                 | $\rightarrow y = 4$  |
| $0 \text{ --- } \bullet \text{ --- } 5$ | $\text{Intersezione}(d, g)$  |
| $c : \text{Circonferenza}(C, k)$        | $\rightarrow V_2 = (2.8284271247462, 4)$                               |
| $\rightarrow x^2 + (y - 4)^2 = 4$       | $\rightarrow V = (-2.8284271247462, 4)$                                |
| $\text{Intersezione}(c, f)$             | $\text{luogo1} = \text{Luogo}(V, C)$                                   |
| $\rightarrow C_1 = (0, 2)$              | $\text{luogo2} = \text{Luogo}(V\{2\}, C)$                              |
| $\rightarrow K = (0, 6)$                |  |

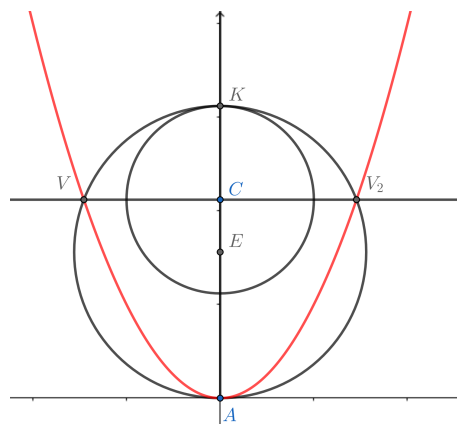


Figura 3.11

**L'ellissografo di Proclo:** fissato il punto  $A$  vincolato a muoversi lungo l'asse delle  $y$ , si costruisce il punto  $B$  che è a distanza  $k$  costante da  $A$ . Dal momento che  $B$  è vincolato a muoversi lungo l'asse  $x$ , si costruisce la circonferenza di centro  $A$  e raggio  $k$ , e si trovano le due intersezioni  $B$  e  $C$  tra la circonferenza e l'asse delle ascisse. Tracciate le rette passanti per  $A$  e le intersezioni, si individua il punto  $P$  su una delle due rette tracciando la circonferenza di centro  $B$  e raggio a piacere. Inoltre, si traccia il punto  $P'$  simmetrico a  $P$  rispetto all'asse  $y$ . Attraverso il comando "Mostra traccia", oppure con il comando "Luogo", i punti  $P$  e  $P'$  disegnano l'ellisse cercata. Le istruzioni e la figura appaiono su Geogebra nel modo seguente:

|                                  |  |
|----------------------------------|--|
| A = Punto(asseY)                 | e : Circonferenza(B, 2)                    |
| → (0, 0.71)                      | → $(x + 2.9147727184122)^2 + y^2 = 4$      |
| c : Circonferenza(A, 3)          | Intersezione(e, g)                         |
| → $x^2 + (y - 0.71)^2 = 9$       | → D = (-0.9715909061374, 0.47333333333333) |
| Intersezione(c, asseX)           | → P = (-4.857954530687, -0.47333333333333) |
| → B = (-2.9147727184122, 0)      | P' = Simmetrico(P, asseY)                  |
| → C = (2.9147727184122, 0)       | → (4.857954530687, -0.47333333333333)      |
| g : Retta(A, B)                  | luogo1 = Luogo(P, A)                       |
| → $y = 0.2435867453798x + 0.71$  | luogo2 = Luogo(P', A)                      |
| i : Retta(A, C)                  |  |
| → $y = -0.2435867453798x + 0.71$ |  |

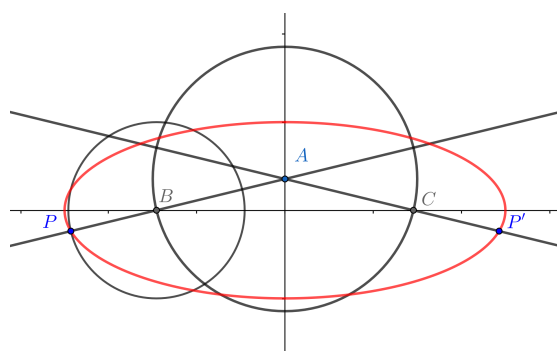


Figura 3.12

**L'iperbolografo a filo:** fissati i fuochi, si costruiscono le due aste di lunghezza stabilita  $k$  nel seguente modo: data la circonferenza di centro  $F_1$  e

raggio a piacere  $> k$ , si prende  $A$  punto sulla circonferenza e si traccia il segmento  $AF_1$ . La seconda asta si costruisce prendendo la retta passante per  $F_2$  e parallela alla prima asta. Per disegnare ciò che nella macchina corrisponde al filo, si fissa un punto  $N$  sul segmento  $AF_1$  precedentemente tracciato. Il punto  $P$  si trova sull'asta in modo che  $PN \cong PF_2$ . Per fare ciò si costruisce il triangolo isoscele di base  $NF_2$ , tracciando l'asse del segmento  $NF_2$  e intersecandola con l'asta. Per trovare il punto  $Q$  che disegni il secondo ramo di iperbole, si traccia la perpendicolare al segmento  $PF_2$  e si interseca con la retta costruita precedentemente. Attraverso il comando "Mostra traccia" i punti  $P$  e  $Q$  disegnano l'iperbole cercata.

Le istruzioni e la figura appaiono su Geogebra nel modo seguente:

|  |   |
|--|---|
| $F_1 = (-3, 0)$                                      | $g = \text{Segmento}(F_2, N)$                         |
|  | $\rightarrow 3.1999211986314$                         |
| $F_2 = (3, 0)$                                       | $h : \text{AsseSegmento}(g)$                          |
|  | $\rightarrow y = 2.5416354089879x - 3.254959950016$   |
| $A = \text{Punto}(\text{Circonferenza}(F_1, 8))$     | $P = \text{Intersezione}(\text{Asta1}, h)$            |
| $\rightarrow (4.4591550830741, 2.8915403242304)$     | $\rightarrow (2.0510395089485, 1.9580346911605)$      |
| $\text{Asta1} = \text{Segmento}(F_1, A)$             | $i = \text{Segmento}(P, F_2)$                         |
| $\rightarrow 8$                                      | $\rightarrow 2.1758735867152$                         |
| $f : \text{Retta}(F_2, \text{Asta1})$                | $j : \text{Retta}(F_1, i)$                            |
| $\rightarrow y = 0.3876498466685x - 1.1629495400056$ | $\rightarrow y = -2.0633469039273x - 6.1900407117819$ |
| $N = \text{Punto}(\text{Asta1})$                     | $Q = \text{Intersezione}(j, f)$                       |
| $\rightarrow (0.0222671933893, 1.1715814141087)$     | $\rightarrow (-2.0510395089485, -1.9580346911605)$    |

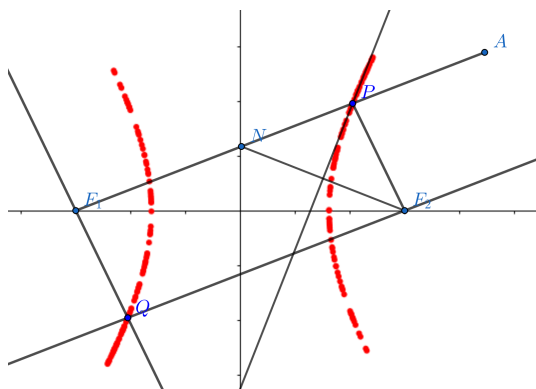
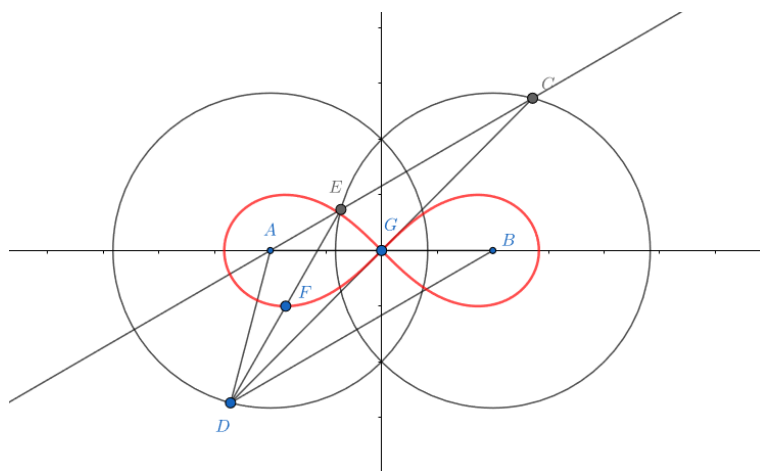


Figura 3.13

**La lemniscata di Bernoulli:** fissati i perni  $A$  e  $B$  sull'asse  $x$ , si costruisce una circonferenza di centro  $A$  e lunghezza pari alla lunghezza del segmento che unisce  $A$  e  $B$  moltiplicata per  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .  $D$  è un punto sulla circonferenza. Una volta tracciati i segmenti  $AD$  e  $BD$ , si costruisce la retta passante per  $A$  e parallela a  $BD$  e la circonferenza di centro  $B$  e raggio  $AD$ . L'intersezione tra la retta e la circonferenza individua due punti,  $F$  e  $G$ . Si tracciano il segmento  $DG$  e  $DF$ . I loro punti medi individuano, mediante il comando "Mostra traccia" o il comando "Luogo", la lemniscata.

Le istruzioni e la figura appaiono su Geogebra nel modo seguente:

|   |   |
|---|---|
| $A = (-2, 0)$   | $g = \text{Segmento}(A, D)$<br>→ 2.8284271247462  |
| $B = (2, 0)$  | $h = \text{Segmento}(B, D)$<br>→ 3.2800391070344  |
| $f = \text{Segmento}(A, B)$<br>→ 4  | $i : \text{Retta}(A, h)$<br>→ $y = 0.9781341655756x + 1.9562683311511$  |
| $a = \text{Lunghezza}(f)$<br>→ 4  | $d : \text{Circonferenza}(B, g)$<br>→ $(x - 2)^2 + y^2 = 8$   |
| $c : \text{Circonferenza}\left(A, a \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$<br>→ $(x + 2)^2 + y^2 = 8$ | Intersezione( $d, i$ )<br>→ $C = (0.3448320679594, 2.2935603582083)$<br>→ $E = (-0.2564127344782, 1.7054622750694)$ |
| $D = \text{Punto}(c)$<br>→ $(-0.3448320679594, -2.2935603582083)$                         | $j = \text{Segmento}(E, D)$<br>→ 4  |
|   | $F = \text{PuntoMedio}(j)$<br>→ $(-0.3006224012188, -0.2940490415695)$  |
|   | $k = \text{Segmento}(C, D)$<br>→ 4.6386757902822  |
|   | $G = \text{PuntoMedio}(k)$<br>→ $(0, 0)$  |
|   | $\text{luogo1} = \text{Luogo}(F, D)$  |
|   | $\text{luogo2} = \text{Luogo}(G, D)$  |



**La curva kappa:** fissati un punto  $Q$  vincolato a muoversi lungo l'asse  $y$  e il punto  $O$  sull'origine degli assi, si vuole costruire il triangolo rettangolo inscritto nella circonferenza  $c$  passante per  $Q$ ,  $O$  e avente centro nel loro punto medio. I punti appartenenti alla curva kappa sono i vertici di una corda che taglia la circonferenza in  $Q$  e di lunghezza fissata  $a$ . Per trovarli, si costruisce una circonferenza di centro  $Q$  e raggio  $a$  e si trova l'intersezione con  $c$ . In particolare, vengono individuati due punti. Attraverso il comando "Mostra traccia", oppure con il comando "Luogo", si costruisce il luogo geometrico cercato.

Le istruzioni e la figura appaiono su Geogebra nel modo seguente:

```

Q = Punto(asseY)
→ (0, -5.4069639953542)

M = PuntoMedio(Q, O)
→ (0, -2.7034819976771)

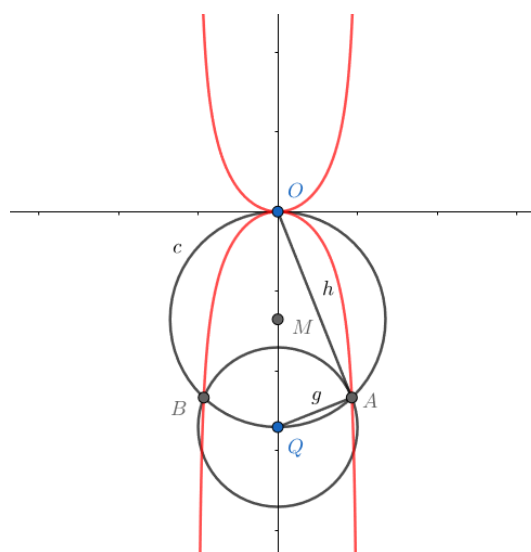
c : Circonferenza(M, Q)
→  $x^2 + (y + 2.7034819976771)^2 = 7.3088149117643$ 

a = 2
-5 ————— ● ————— 5

d : Circonferenza(Q, a)
→  $x^2 + (y + 5.4069639953542)^2 = 4$ 

Intersezione(c, d)
→ A = (1.8581484473792, -4.6671773048128)

```



**La concoide di Nicomede:** fissato il punto  $O$  all'origine degli assi e la retta  $s$ , costruiamo un punto  $M$  vincolato a muoversi lungo tale retta. Tracciamo la retta  $g$  passante per l'origine e il punto  $M$ . I punti della concoide sono a distanza fissata da  $M$ , perciò si costruisce una circonferenza di centro  $M$  e raggio  $k$ , dove  $k$  è uno slider. Infine, l'intersezione tra la retta  $g$  e la circonferenza trova i punti della concoide. Per visualizzarla è possibile utilizzare il comando "Mostra traccia" sulle intersezioni o il comando "Luogo" che individua il luogo geometrico tracciato dalle intersezioni.

Le istruzioni e la figura appaiono su Geogebra nel modo seguente:

```
O = (0, 0)
-----
f : Retta((2, 0), asseY)
→ x = 2
-----
M = Punto(f)
→ (2, 2.4230318136141)
-----
g : Retta(O, M)
→ y = 1.2115159068071x
-----
k = 5
-5 -----● 5
-----
c : Circonferenza(M, k)
→ (x - 2)² + (y - 2.4230318136141)² = 25
```

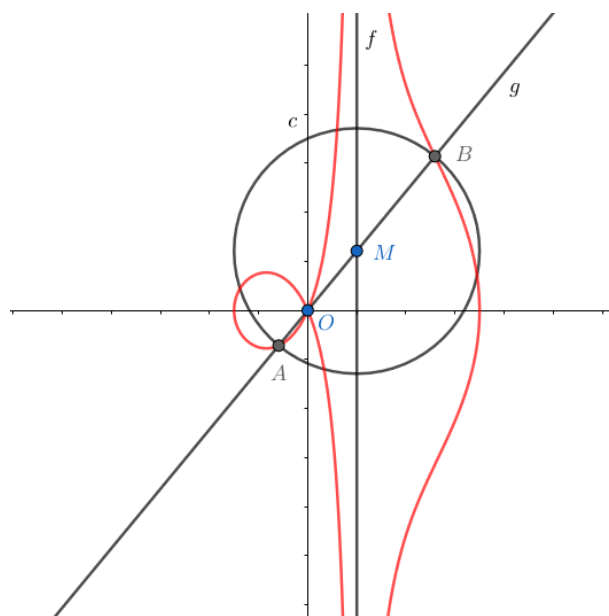
Intersezione(c, g)

→ A = (-1.1828604258336, -1.43305422143)

→ B = (5.1828604258336, 6.2791178486583)

luogo1 = Luogo(A, M)

luogo2 = Luogo(B, M)



# Capitolo 4

## Sperimentazione e analisi dell'attività

In questo capitolo si espone la sperimentazione del percorso laboratoriale realizzata durante una scuola estiva presso il Liceo Augusto Righi di Bologna. Nella prima parte si descriverà la struttura della sperimentazione, mentre nella seconda si analizzeranno le risposte date dagli studenti e le riflessioni emerse dalle discussioni.

Si terminerà evidenziando aspetti positivi e criticità del progetto.

### 4.1 Sperimentazione dell'attività

Il percorso laboratoriale descritto nel capitolo precedente è stato sperimentato durante una scuola estiva tenutasi presso il Liceo Augusto Righi di Bologna da martedì 23 agosto a venerdì 26 agosto.

Al corso erano iscritti dieci studenti, ma all'attività se ne sono presentati solo sette: due di questi avevano terminato il terzo anno di scuola secondaria di primo grado, tre avevano terminato il primo anno del Liceo Scientifico Scienze Applicate, una ragazza aveva terminato il secondo anno del Liceo Scientifico e un ragazzo aveva terminato il terzo anno del Liceo Scientifico Scienze Applicate.

L'attività è stata suddivisa in quattro lezioni da due ore ciascuna, per un totale di 8 ore di percorso. Al termine di ogni giornata è stata ripensata la lezione successiva e riorganizzata a seconda di quanto era stato svolto nella lezione precedente. Nella Tabella 4.1 è riportata una struttura schematica della suddivisione delle lezioni.



|                 |                                |  |
|-----------------|--------------------------------|--|
| Prima lezione   | 23 agosto 2022<br>durata 2 ore | Fase esplorativa e ricerca del luogo geometrico      |
| Seconda lezione | 24 agosto 2022<br>durata 2 ore | Ricerca del luogo geometrico ed equazione cartesiana |
| Terza lezione   | 25 agosto 2022<br>durata 2 ore | Ricerca dell'equazione cartesiana                    |
| Quarta lezione  | 26 agosto 2022<br>durata 2 ore | Geogebra   |

Tabella 4.1: Scansione temporale del laboratorio

Le prime tre lezioni si sono svolte nell'aula delle macchine matematiche presso il Liceo Augusto Righi, mentre l'ultimo giorno ci siamo recati nel laboratorio di informatica del medesimo istituto per poter usufruire dei computer; in particolare è stato usato Geogebra, software che è stato descritto nel Capitolo 1.

Durante i laboratori erano presenti in aula due docenti: il professor Maurizio Casali, docente di matematica e fisica presso il Liceo Righi, e la sottoscritta. Nei primi tre incontri sono state usate le macchine matematiche: su ciascuna macchina è stato posto un foglio bianco e i ragazzi sono stati dotati di mine, in modo che potessero esplorarne il funzionamento. Inoltre, sono stati dotati di gomma, scotch per poter fissare i fogli, righello e goniometro per poter procedere con alcune misurazioni. Durante le discussioni insieme è stata usata la lavagna presente in aula, mentre durante le discussioni divise in gruppi è stato posto un registratore per poter analizzare le riflessioni degli studenti, in parte riportate nella Sezione 4 in forma anonima.

Di seguito viene descritta nel dettaglio l'organizzazione delle singole lezioni.

#### 4.1.1 Prima lezione

Il primo giorno di attività è stato svolto martedì 23 agosto dalle ore 9 alle ore 11 presso il laboratorio delle macchine matematiche. Inizialmente si è proposta una breve introduzione sulle macchine matematiche che aveva anche l'obiettivo di comprendere quali fossero le conoscenze dei ragazzi sul concetto di curva. Alla domanda "Conoscete un esempio di macchina matematica?", essi hanno risposto immediatamente il compasso, aggiungendo che questo permette di disegnare una circonferenza. Si è dunque chiesto loro come avrebbero definito la circonferenza: sono stati tutti concordi nel dare

la definizione di circonferenza come luogo geometrico (per la definizione, si veda la Sezione 2.1). In seguito, è stato chiesto se conoscessero altri modi per descrivere la circonferenza. Osservando il piano cartesiano, i ragazzi più grandi hanno nominato le equazioni cartesiane, mentre i ragazzi più giovani non ne avevano familiarità. Gli studenti, in seguito, hanno ricavato l'equazione della circonferenza centrata nell'origine mediante il teorema di Pitagora, conosciuto da tutti.

Successivamente, è stato chiesto agli studenti se conoscessero altre curve: sono state nominate la parabola, l'ellisse e l'iperbole. La maggior parte dei ragazzi ne avevano una conoscenza superficiale, derivante da argomenti affrontati in classe quali la proporzionalità inversa. Infine sono state disegnate alcune figure alla lavagna, riportate in Figura 4.1, e si è chiesto loro se ritenevano che esse fossero curve o no. A tale domanda nessuno studente ha provato a rispondere.

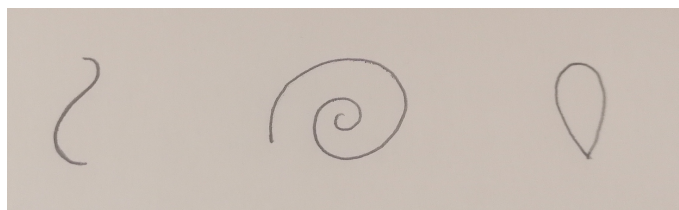


Figura 4.1

Dopo questa fase introduttiva, durata all'incirca 15 minuti, si è passati al laboratorio, organizzato nel modo seguente:

1. gli studenti sono stati divisi in tre gruppi, due formati da due persone e uno da tre: i ragazzi di terza media sono stati messi in coppia insieme ai ragazzi più grandi, mentre i ragazzi del primo anno di scuola superiore hanno composto il terzo gruppo.
2. A ciascun gruppo è stata consegnata una macchina matematica differente (l'ellissografo di Proclo, la curva kappa e il parabolografo Cavalieri) senza spiegarne il funzionamento né la curva che disegnava, dandogli la consegna di capire come usare la macchina e disegnare la curva. Per aiutare gli studenti con il ragionamento, è stata consegnata loro la prima pagina della scheda guida, riportata in Appendice A, che contiene la prima domanda.<sup>1</sup> Nel momento in cui riuscivano ad intuire il funzionamento della macchina, veniva consegnata la seconda pagina

<sup>1</sup>Per l'analisi di questa domanda e delle successive si veda Sezione 3.2.2.

della scheda guida associata alla macchina, con la seconda domanda, in modo da stimolarli ad un ragionamento sulla curva ottenuta. Questa fase ha occupato circa 20 minuti.

3. A mano a mano che i ragazzi terminavano il disegno della curva, veniva data loro una seconda macchina (la lemniscata di Bernoulli, l'iperbolografo a filo e la concoide di Nicomede) che permetteva la costruzione di una curva differente, e in maniera analoga veniva consegnata inizialmente la prima pagina della scheda e in seguito la seconda pagina. Anche questa fase ha occupato circa 20 minuti.
4. Al termine di queste due fasi è seguita una discussione insieme. Tutti i gruppi hanno presentato le loro macchine e le analisi delle curve considerate. In particolare, si è riflettuto sulle caratteristiche qualitative delle curve, sulle loro somiglianze e sulle loro differenze. È emerso che le caratteristiche riportate non erano sufficienti per definire le curve e che era necessario trovare una caratteristica peculiare. Dato che gli studenti erano in numero esiguo, l'osservazione delle macchine è avvenuta spostandosi tra i banchi. I ragazzi si sono avvicinati ai gruppi che esponevano il funzionamento della macchina e hanno potuto vedere il movimento da vicino. Questa fase ha occupato circa 15 minuti.
5. Divisi nuovamente in gruppi, i medesimi dell'ora precedente, i ragazzi hanno scelto su quale delle due macchine che avevano analizzato volevano concentrarsi e sono state consegnate loro le due domande successive presenti nella scheda in modo che studiassero con più attenzione la macchina e cercassero una definizione come luogo geometrico della curva ad essa associata. La lezione è terminata una volta che tutti i gruppi sono riusciti ad arrivare al luogo geometrico. I gruppi, in particolare, si sono soffermati sullo studio del parabolografo di Cavalieri, della curva kappa e della lemniscata di Bernoulli.

La distribuzione delle macchine è avvenuta nel modo seguente:

1. Il primo gruppo, composto da un ragazzo di terza media e un ragazzo di terza superiore, ha analizzato il parabolografo di Cavalieri e la concoide di Nicomede.
2. Il secondo gruppo, composto dai tre ragazzi di prima superiore, ha studiato la curva kappa e l'iperbolografo a filo.
3. Il terzo gruppo, composto da uno studente di terza media e uno studente di seconda superiore, ha osservato l'ellissografo a filo e la lemniscata di Bernoulli.

### 4.1.2 Seconda lezione

Il secondo giorno di attività è stato svolto mercoledì 24 agosto dalle ore 9 alle ore 11 presso il laboratorio delle macchine matematiche.

La lezione è incominciata analizzando e discutendo le risposte date dai ragazzi in merito allo studio di tre macchine: il parabolografo di Cavalieri, la curva kappa e la lemniscata di Bernoulli. Dopo aver descritto la parabola come luogo geometrico è emerso, come anche sottolineato dal professor Casali, che il parabolografo di Cavalieri non era costruito a partire dalla definizione usuale come luogo. Per comprendere, dunque, tale definizione e ricavare la proprietà usata nella macchina proposta, è stata utilizzata un'altra macchina, presente nel laboratorio: il parabolografo a filo, la cui scheda illustrativa è presente in Appendice B. Sono stati utilizzati i dieci parabografi presenti nel laboratorio, cinque di un tipo e cinque dell'altro. Distribuiti ai ragazzi, essi hanno iniziato a studiare il parabolografo a filo divisi in gruppi come il giorno precedente. Uno degli studenti è arrivato in ritardo di circa 45 minuti, per cui il ragazzo rimasto da solo è stato aiutato dal docente Casali e da me. Gli studenti, dopo aver capito il funzionamento della macchina, sono stati indirizzati alla ricerca del fuoco e della retta direttrice. Una volta trovati, gli studenti sono passati ad analizzare il secondo tipo di macchina. È risultato che alcuni di loro, soprattutto i più giovani, non erano a conoscenza dei teoremi di Euclide, necessari per la ricerca della proprietà. Il docente e io, perciò, abbiamo aiutato i gruppi con alcune domande mirate, per arrivare a ricavare il secondo teorema di Euclide: prendendo in considerazione la figura nella terza domanda dello schema sul parabolografo di Cavalieri (si veda Appendice A), e considerati il triangolo  $VAK$ , il triangolo  $VCK$  e il triangolo  $VCA$ , cosa possiamo dire sugli angoli? Come sono i triangoli tra di loro? Per stimolare il ragionamento è stata utilizzata la seconda parte della scheda del parabolografo di Cavalieri. La fase a gruppi è durata circa 30 minuti.

Dopo che tutti i gruppi sono riusciti a ricavare la proprietà, si è proceduto con una discussione insieme per riflettere in maniera approfondita sull'equazione cartesiana. L'aspetto su cui ci si è focalizzati maggiormente è l'importanza del sistema di riferimento. Dal momento che molti studenti erano alle prime armi con l'utilizzo del piano cartesiano, si è osservato prima il comportamento della retta, e come l'equazione vari a seconda del sistema di riferimento che si sceglie. In maniera analoga, si è analizzata con più approfondimento rispetto alla prima lezione l'equazione cartesiana della circonferenza. Dopo queste riflessioni, si è andati ad analizzare la parabola. I ragazzi hanno deciso insieme il sistema di riferimento, per poi procedere con la ricerca dell'equazione mediante ciò che avevano trovato analizzando il parabolografo di Cavalieri. Si è così giunti all'equazione cartesiana della parabola con il

vertice all'origine degli assi di riferimento:

$$y = kx^2.$$

Questa parte di lezione è durata circa 15 minuti. Terminata l'analisi della parabola, si è proceduto con una discussione insieme sulle altre due curve che erano state analizzate dai due gruppi rimanenti la lezione precedente. Si è quindi descritta la curva kappa come luogo geometrico e si sono analizzate le somiglianze e le differenze con la parabola, ed è stata esposta la definizione come luogo geometrico di lemniscata. Questa fase ha occupato circa 15 minuti.

Al termine dell'esposizione dei gruppi, si è fatta una piccola pausa di qualche minuto.

Ripresa l'attività, i ragazzi si sono nuovamente divisi nei gruppi e hanno analizzato le macchine che rimanevano, in maniera analoga a quanto avvenuto il giorno prima. Dunque, sono state consegnate loro le schede sulle curve con la terza e la quarta domanda, in modo da essere aiutati nel ragionamento e nella ricerca della definizione come luogo geometrico. I gruppi hanno analizzato le seguenti macchine: la concoide di Nicomede, l'iperbolografo a filo e l'ellissografo a filo. Questa parte ha occupato il resto della lezione.

### 4.1.3 Terza lezione

Il terzo giorno di attività è stato svolto giovedì 25 agosto dalle ore 9 alle ore 11 presso il laboratorio delle macchine matematiche.

La lezione è incominciata riprendendo gli argomenti della lezione precedente: si sono osservate le curve che, a gruppi, avevano studiato (concoide di Nicomede, iperbole ed ellisse) e sono state descritte come luoghi geometrici. Il gruppo che aveva l'ellissografo di Proclo ha chiarito che la macchina non era costruita mediante la proprietà da loro espressa: per questo, è stato utilizzato un ellissografo a filo, la cui scheda illustrativa è presente in Appendice B, per vedere la costruzione come luogo geometrico. Tale fase di studio della macchina ha occupato meno tempo rispetto alla lezione precedente, sia perché una riflessione analoga era già emersa con la parabola, sia perché l'ellissografo a filo ha un funzionamento molto più intuitivo rispetto al parabolografo a filo. Questa fase di esposizione delle curve come luoghi geometrici è durata circa venti minuti.

In seguito, la discussione ha virato sull'equazione cartesiana, riprendendo anche i suggerimenti emersi dal giorno precedente con il parabolografo. Perciò, gli studenti si sono nuovamente divisi negli stessi gruppi e hanno cercato di trovare l'equazione cartesiana delle macchine che avevano analizzato i giorni

precedenti. Nello studio, erano guidati dalle domande 5) e 6) delle schede, che vertevano sulla ricerca di un opportuno sistema di riferimento e sulle proprietà da usare per ricavare l'equazione cercata. Era assente uno studente, perciò il ragazzo rimasto da solo, che doveva studiare la concoide di Nicomede, è stato seguito da me, mentre gli altri gruppi sono stati aiutati dal professor Casali e da me.

A seconda della curva che dovevano studiare, le tempistiche sono cambiate da gruppo a gruppo. Il ragazzo che doveva studiare la concoide ha impiegato circa un'ora, a cui è seguita una fase di formalizzazione di quanto ricavato. Uno dei gruppi ha impiegato circa mezz'ora per trovare l'equazione della curva kappa, e il resto della lezione per quella dell'iperbole. L'ultimo gruppo ha trovato l'equazione dell'ellisse in circa 45 minuti, mentre nel tempo rimanente ha individuato l'equazione della lemniscata.

#### 4.1.4 Quarta lezione

Il quarto giorno di attività è stato svolto venerdì 26 agosto dalle ore 9 alle ore 11 presso il laboratorio di informatica del Liceo Righi. Gli studenti erano divisi negli stessi gruppi delle giornate precedenti, ma ogni studente aveva a disposizione un computer; anche io utilizzavo un computer proiettando alla lavagna il desktop. Abbiamo utilizzato Geogebra classic, che si può utilizzare direttamente on-line.<sup>2</sup> La lezione è incominciata riprendendo l'argomento affrontato il giorno precedente, ovvero la ricerca delle equazioni cartesiane delle curve algebriche. Si è osservato che, usando le equazioni cartesiane trovate, su Geogebra si riesce a costruire senza difficoltà la curva cercata. Questa fase introduttiva ha permesso agli studenti di prendere confidenza con il software, in quanto sono stato lasciati liberi qualche minuto di esplorarlo e studiarlo. Sono state date inoltre indicazioni sulle funzioni e gli strumenti principali. Quasi tutti gli studenti avevano già utilizzato o erano a conoscenza di Geogebra, mentre un ragazzo non sapeva di cosa si trattasse. Questa fase è durata circa 20 minuti.

Successivamente, ai ragazzi è stato chiesto di prendere in considerazione una delle due macchine studiate. Il loro obiettivo era quello di riprodurre la macchina matematica su Geogebra, in modo da disegnare la curva algebrica. A supporto, è stata consegnata loro l'ultima parte delle schede contenente dei suggerimenti su come procedere. I gruppi hanno deciso di studiare la curva kappa, l'ellissografo di Proclo e la concoide di Nicomede. Durante questa fase, io ho girato tra i gruppi nel caso avessero domande o richieste. Questa

---

<sup>2</sup>Geogebra classic è utilizzabile mediante il link seguente: <https://www.geogebra.org/classic?lang=it>.

fase ha occupato circa mezz'ora.

Subito dopo, c'è stata una fase di confronto, in cui ogni gruppo ha mostrato come ha costruito la macchina su Geogebra. Attraverso le indicazioni degli studenti, ho costruito le curve proiettando il software sulla lavagna. L'esposizione dei gruppi è durata circa mezz'ora.

Infine, la lezione si è conclusa con la costruzione su Geogebra, fatta tutti insieme, della lemniscata di Bernoulli. Dopo aver dato loro alcuni suggerimenti, gli studenti hanno disegnato la curva.

Le schede delle curve che non sono state costruite durante la lezione sono state caricate sul sito del Laboratorio delle macchine Matematiche a disposizione degli studenti.<sup>3</sup>

## 4.2 Analisi dell'attività

Nella Sezione 4.2.1 si formulano alcune riflessioni generali sul progetto e sulle discussioni avvenute durante i laboratori. Nelle sezioni successive si andranno ad analizzare aspetti legati alle singole macchine. Infine, nella Sezione 4.2.8 si rifletterà sull'approccio che gli studenti hanno avuto con Geogebra.

### 4.2.1 Osservazioni generali

La prima difficoltà emersa durante le lezioni è stato il numero esiguo di studenti. Sebbene gli iscritti fossero dieci, si sono presentati all'attività in sette di cui due, a differenza di quanto si pensava, avrebbero iniziato il liceo a settembre. Inoltre, le iscrizioni, aperte a tutte le classi, sono state chiuse un paio di giorni prima dell'inizio dell'attività. Per questo, nonostante essa fosse stata progettata nei dettagli, è stato necessario avere una mentalità elastica per affrontare eventuali cambiamenti in corso. Il basso numero di studenti non ha inizialmente aiutato nella partecipazione. In parte per le limitate conoscenze degli studenti più giovani, in parte perché non si conoscevano tra di loro e in parte per la paura di sbagliare, nella prima mezz'ora il dialogo è risultato complesso, dal momento che tendevano a non rispondere alle domande o a riflessioni provocatorie. Per esempio, alla domanda "Cosa credete che sia una curva?", nessuno ha cercato di dare una risposta. Con il passare dell'ora, e soprattutto nei giorni successivi, i ragazzi si sono dimostrati sempre più partecipativi, arrivando, nell'ultima attività realizzata insieme, ovvero la costruzione della lemniscata di Bernoulli su Geogebra, a

---

<sup>3</sup>Si può accedere al sito tramite il seguente link: <https://www.matlabrighibo.it/macchine-matematiche/>.

partecipare tutti molto attivamente (l'ultima attività è stata proprio svolta su loro esplicita richiesta). Inoltre, è emerso in particolare molto interesse da parte degli studenti di prima superiore: oltre a formulare diverse domande e condividere riflessioni, il terzo giorno di attività si sono fermati qualche minuto dopo la fine della lezione per terminare i calcoli che stavano svolgendo. In generale, tutti gli studenti si sono mostrati volenterosi nel mettersi in gioco, specialmente quando si sono divisi a gruppi e hanno dovuto esplorare le macchine. Nessuno di loro aveva mai visto le macchine matematiche proposte; inoltre, la maggior parte di loro conosceva le coniche solo superficialmente, non avendo ancora affrontato l'argomento in classe. Durante la fase introduttiva della prima lezione, è emerso che la parabola e l'iperbole erano state studiate da tutti a partire dalla risoluzione delle equazioni di secondo grado e dalle proporzionalità quadratiche e inversa, ma molti di loro non ne conoscevano le definizioni come luoghi né le equazioni cartesiane. Perciò, non avendo troppe conoscenze pregresse da poter usare come base, hanno esplorato con molta libertà le macchine, facendo tentativi, formulando ipotesi e riflessioni e cercando insieme soluzioni. I disegni schematici che dovevano realizzare come richiesto nella prima domanda presente nelle schede sono risultati tutti molto precisi, come si può osservare nelle Figure 4.2 e 4.3: la cura dei dettagli ha permesso loro di osservare con più chiarezza gli elementi che componevano le macchine, giungendo abbastanza in fretta a capirne il funzionamento.

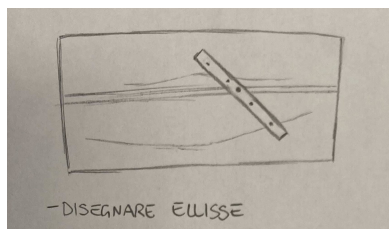


Figura 4.2: Domanda 1) della scheda F.

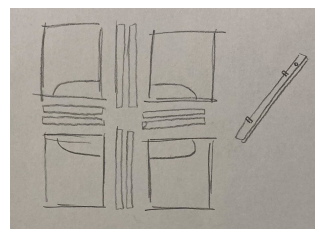


Figura 4.3: Domanda 1) della scheda B.

Gli studenti hanno mostrato desiderio e interesse nello scoprire insieme caratteristiche delle curve che venivano loro assegnate: ad esempio, hanno formulato domande sulla differenza tra la curva kappa e la parabola e hanno chiesto più informazioni sulle curve dal punto di vista storico.

Si è osservato, inoltre, che, nonostante le loro conoscenze sulle coniche fossero limitate, nelle loro risposte e durante le discussioni insieme hanno spesso cercato di usare termini formali anche in maniera impropria, oltre a richiamare costantemente curve già viste in classe. A volte le loro risposte erano vaghe,



poco precise, molto basate su osservazioni visive, come emerge nelle risposte date nella scheda della curva kappa, analizzata nella Sezione 4.2.6, oppure si sono trovati in difficoltà in mancanza di termini formali, come emerge nella Sezione 4.2.7. Spesso gli studenti tendono ad associare la matematica esclusivamente a nozioni tecniche, perciò il compito del docente dovrebbe essere proprio quello di non forzare la formalità, ma renderla necessaria e unita ad una comprensione profonda dell'argomento che si sta trattando. Un aspetto positivo dell'approccio avuto dagli studenti è che sono emersi molti tentativi di discussione e riflessione nei gruppi che sono risultati molto interessanti. Essi verranno approfonditi nelle sezioni successive.

Un ultimo elemento di cui si è dovuto tenere conto è stata la maggiore difficoltà dei ragazzi di terza media. Essi hanno formulato molte domande, soprattutto sull'equazione cartesiana che conoscevano poco, e in generale è sembrato che facessero più fatica a seguire i ragionamenti dei compagni. Effettivamente, per come era stata strutturata l'attività, forse le conoscenze pregresse non erano sufficienti. In generale, il percorso sarebbe più adatto per studenti che hanno affrontato almeno il primo anno di scuola secondaria di secondo grado. Tuttavia, si è osservata una grande predisposizione per il software Geogebra, a tal punto che uno dei due ragazzi è riuscito a terminare l'esercizio proposto prima di tutti gli altri studenti. Questo aspetto verrà approfondito nella Sezione 4.2.8.

Di seguito si procederà in un'analisi dettagliata di scheda per scheda descrivendo potenzialità e aspetti critici del progetto.

#### 4.2.2 Analisi della scheda A: il parabolografo di Cavalieri

Come già accennato nella Sezione 4.2.1, i ragazzi sono riusciti a capire il funzionamento della macchina in poco tempo, e hanno subito concluso che la curva tracciata fosse una parabola. Tuttavia, non hanno approfondito il ragionamento e, alla richiesta di giustificare le loro ipotesi, non sono riusciti a rispondere in maniera esaustiva, affermando semplicemente che "si vede che è una parabola". Tale approccio è emerso anche con la risposta alla domanda 2) della scheda, in cui la risposta è stata semplicemente "Parabola". Emerge così un tentativo degli studenti di associare ai disegni curve e figure già conosciute e studiate in classe. Lo stesso gruppo, infatti, si è trovato molto in difficoltà nel momento in cui, nell'ora successiva, ha dovuto descrivere la conoide, poiché non sapevano come affrontare la risposta. Una maggiore

analisi di tale aspetto è presente nella Sezione 4.2.7.

Un aspetto critico di questa macchina ha riguardato la domanda 4). Vista l'età degli studenti e il fatto che molti di loro non avevano mai studiato le coniche, si è voluto suddividere il progetto andando prima ad analizzare il luogo geometrico della curva e successivamente l'equazione cartesiana. Tuttavia, il parabolografo di Cavalieri non incorpora la definizione abituale come luogo geometrico che fa uso del fuoco e della direttrice (si veda Definizione 7), bensì la definizione introdotta da Apollonio nell'opera *Le Coniche* che riguarda la relazione tra il quadrato delle ascisse e l'ordinata. Perciò, è stato necessario aggiungere nella domanda alcuni suggerimenti per arrivare alla definizione ricercata. La domanda sul luogo potrebbe risultare una forzatura nel ragionamento: non si appropria la macchina per come è stata costruita, bensì in base a cosa si vuole ricavare. In effetti, nella lezione successiva, è emerso questo aspetto e si è utilizzato il parabolografo a filo, inizialmente non previsto nel progetto, per osservare la curva come luogo geometrico. Attraverso la tabella, gli studenti sono arrivati alla definizione di parabola. Si osserva dalla Figura 4.4 che sono stati usati termini specifici: questo è dovuto al fatto che nel gruppo era presente anche lo studente del terzo anno di scuola superiore, che aveva già trattato la curva in maniera approfondita nel corso dell'anno scolastico.

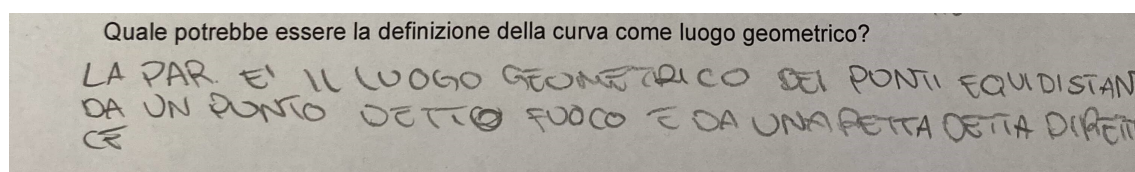


Figura 4.4: Risposta alla seconda parte della domanda 4).

Il secondo giorno si è affrontata la ricerca dell'equazione cartesiana. Si è posta molta attenzione sulla scelta di un opportuno sistema di riferimento. Dopo che gli studenti hanno deciso di porre l'origine degli assi nel vertice della parabola e l'asse delle  $y$  in corrispondenza dell'asse della parabola, a gruppi hanno provato a ricavare l'equazione cartesiana. Siccome alcuni di loro non conoscevano o non ricordavano i teoremi di Euclide sui triangoli rettangoli, di cui il secondo è necessario per ottenere l'equazione, hanno ragionato sulle misurazioni fatte il giorno precedente e condivise dal gruppo che aveva studiato la macchina: hanno così potuto riflettere sui triangoli simili, per giungere infine al teorema necessario e all'equazione cercata. Di seguito la Figura 4.5 mostra i ragionamenti di uno dei gruppi:

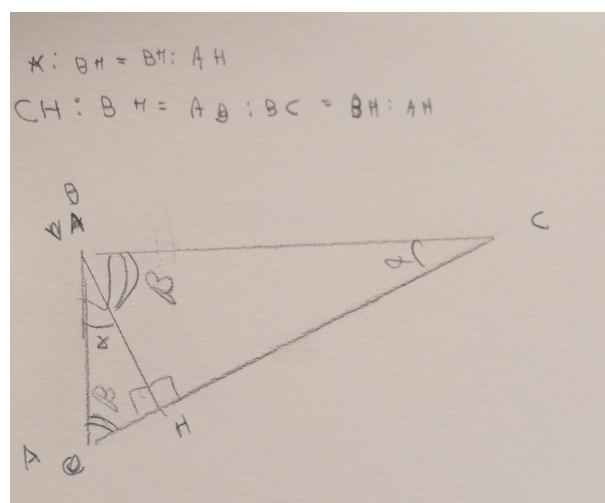


Figura 4.5: Ricerca del secondo teorema di Euclide.

### 4.2.3 Analisi della scheda B: l'ellissografo di Proclo

Capire il funzionamento dell'ellissografo di Proclo è risultato più complesso per gli studenti. Hanno immediatamente intuito che i cilindri di legno dovevano essere inseriti nei binari, ma non era loro chiaro in che modo. Si riporta a dimostrazione di ciò lo scambio che è avvenuto tra i due componenti del gruppo:

**A:** «A cosa serve questa asta?»

**B:** «Ci sono due pezzetti di legno. Andranno messi qui [Indicando i binari].»

**A:** «Prova a metterlo nei binari orizzontali.»

[Lo studente prova ad inserire i due cilindri di legno nel binario orizzontale.]

**A:** «Così però fa solo un movimento orizzontale, non ha senso.»

**B:** «Però questi pezzi devono scorrere per forza.»

[Gli studenti toccano i binari della macchina e provano più volte il movimento suggerito precedentemente, fino a quando uno dei due cilindri non raggiunge l'intersezione tra i due binari.]

B: «Se lo spostiamo in basso? Questo pezzo qui.»

[Lo studente sposta uno dei due cilindri facendolo scorrere lungo il binario verticale, lasciando il secondo cilindro nel binario orizzontale.]

I due studenti, dopo essere riusciti a costruire la curva, hanno immediatamente nominato l'ellisse: uno dei due studenti, in particolare, ha riflettuto sul moto dei pianeti, cercando di richiamare ciò che aveva studiato durante l'anno. Inoltre, sono state nominate anche le orbite degli elettroni nell'atomo. Nonostante un po' di confusione, queste riflessioni mostravano interesse nei confronti dell'argomento e un desiderio di applicare gli studi avvenuti in classe con quanto si trovavano davanti in quel momento. Tale approccio è presente anche nelle risposte alle domande 1) e 2):

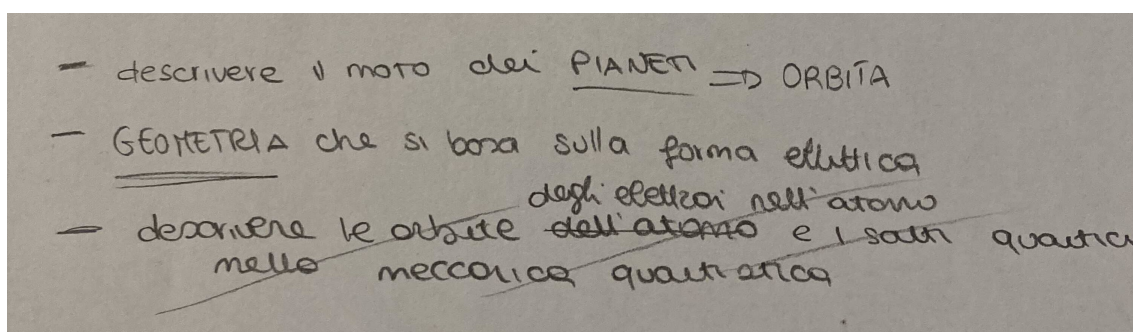


Figura 4.6: Risposta alla domanda 1).

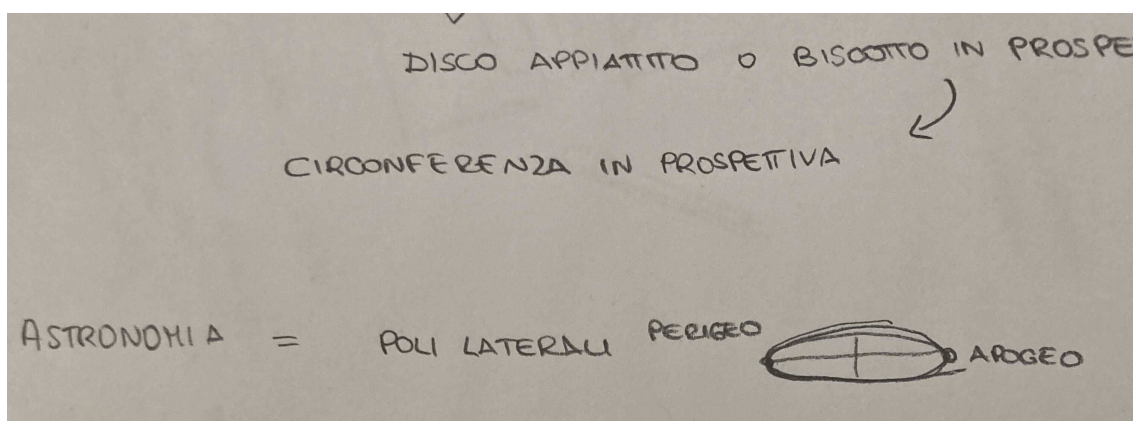


Figura 4.7: Risposta alla domanda 2).

In particolare, la risposta alla seconda domanda risulta molto interessante: da una parte, per descrivere la curva sono stati usati termini quotidiani, come "biscotto", dall'altra emergono termini formali come "perigeo" e "apogeo". Emerge dunque un tentativo di descrivere la curva in maniera più approfondita possibile, ma non sono in grado di descrivere la curva senza utilizzare termini tecnici o paragonandoli a oggetti conosciuti. Durante la discussione insieme, alla mia richiesta di cercare di descrivere maggiormente la curva, gli studenti sono rimasti dubbiosi: solo dopo un mio suggerimento hanno iniziato a usare termini come "curva chiusa" e "continua". In generale, sono emerse alcune difficoltà per quanto riguarda la descrizione qualitativa delle curve. Questo potrebbe essere dovuto al fatto che quello fosse il loro primo approccio con le curve algebriche, dunque non sapessero come osservarle e cosa guardare. Durante le lezioni successive, infatti, sono apparsi molto più decisi e chiari nelle risposte alle domande che venivano poste loro.

Durante lo studio del luogo geometrico, è emerso lo stesso problema sottolineato per il parabolografo di Cavalieri: l'ellissografo di Proclo non è costruito sfruttando la definizione come luogo geometrico, bensì la proprietà enunciata da Proclo nel suo commento al primo libro degli *Elementi* di Euclide, secondo cui, considerato un segmento  $PA$  di lunghezza  $a$  e un punto  $B$  sul segmento tale che  $PB = b$ , il luogo dei punti  $P$  quando i punti  $A$  e  $B$  si muovono rispettivamente sulle due rette perpendicolari è un'ellisse di semiassi  $a$  e  $b$ . Per questo, gli studenti sono stati aiutati nel ragionamento e sono stati posti dei segni nella macchina per indicare i fuochi dell'ellisse. Questa forzatura nel ragionamento, forse ancora maggiore rispetto al parabolografo di Cavalieri, è stata immediatamente osservata dagli studenti, memori delle riflessioni che erano state fatte l'ora precedente proprio sul parabolografo di Cavalieri, perciò hanno velocemente capito che la costruzione dell'ellissografo si basava su una proprietà non ancora analizzata da loro. Per questo, durante le analisi insieme avvenute il giorno dopo, è stato usato un ellissografo a filo per osservare la curva come luogo geometrico.

#### 4.2.4 Analisi della scheda C: l'iperbolografo a filo

Dal disegno che gli studenti hanno realizzato come risposta alla prima domanda della scheda, si osserva la loro propensione a dare dei nomi agli elementi che compongono la macchina. Vi è una ricerca di rigore e linguaggio formale: questo approccio può aiutare nella discussione all'interno del gruppo, poiché insieme hanno deciso i termini da utilizzare. In Figura 4.8 è proposto lo schema realizzato dagli studenti come risposta alla prima domanda.

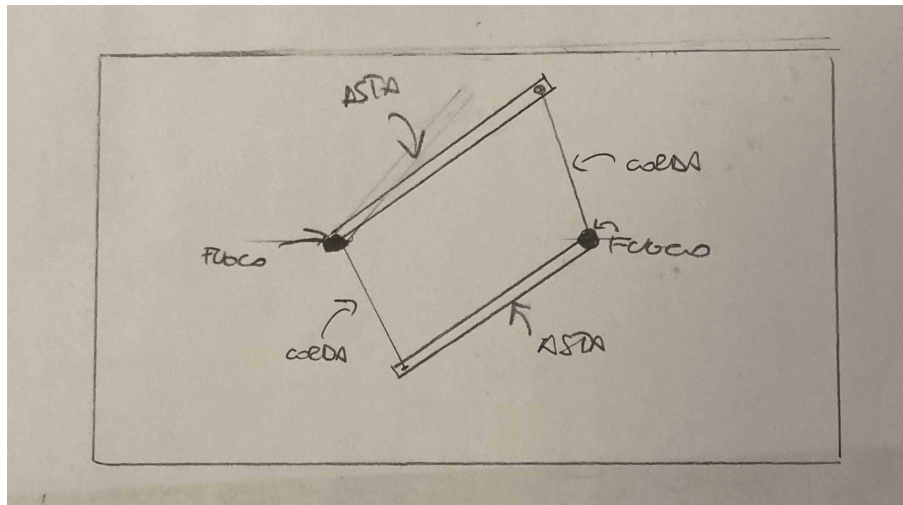


Figura 4.8: Risposta alla domanda 1).

Il gruppo ha avuto alcune difficoltà per quanto riguarda il funzionamento della macchina. Innanzitutto è emerso un piccolo problema tecnico, dal momento che uno dei due fili non era fissato bene ad un estremo del listello, perciò dopo pochi minuti di utilizzo si era sfilato. Questo intoppo è stato risolto velocemente con l'utilizzo dello scotch. Inoltre, il funzionamento di tale macchina non è molto intuitivo. Inizialmente gli studenti avevano ipotizzato che la macchina disegnasse una sinusoide: attraverso il filo, tenuto poco teso, avevano spostato la mina, ma avevano notato che tutti gli altri elementi della macchina risultavano inutili. Avevano, dunque, provato a porre la mina sull'estremo di una delle due aste e ruotarla, ottenendo così un arco di circonferenza; si sono presto resi conto che in questo modo il filo risultava inutile ai fini della costruzione, per cui non poteva essere quello il disegno per cui la macchina era stata progettata. Hanno in seguito provato a tirare il filo tenendo fermo il listello, ma anche in tal caso si sono chiesti quale fosse il senso di avere un'asta che poteva ruotare se non si sfruttava tale movimento. Dopo qualche riflessione, a uno studente è venuto in mente di porre il filo attaccato all'asta in prossimità del perno fisso. Hanno poi fatto ruotare l'asta tenendo il filo teso accostato ad essa. Sono così riusciti ad ottenere la curva per cui la macchina è predisposta. Questo è stato l'unico gruppo che ha descritto nei dettagli come utilizzare la macchina, come si osserva in Figura 4.9.



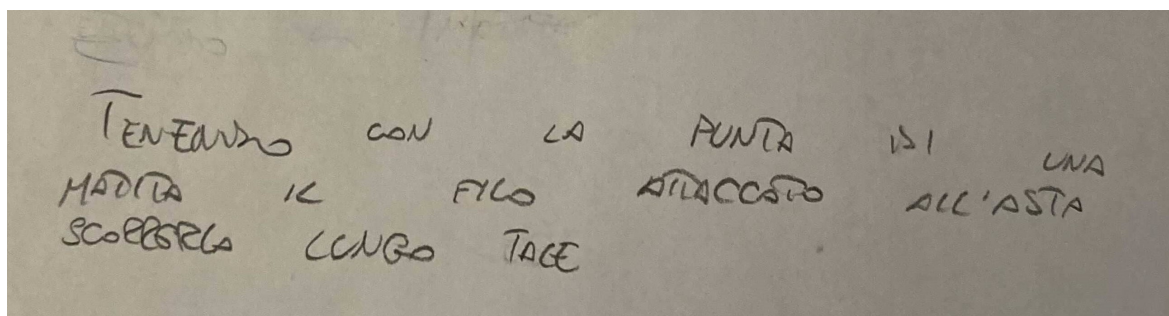


Figura 4.9: Risposta alla domanda 1).

Dopo aver costruito la curva, hanno iniziato ad ipotizzare cosa potesse essere. È emersa questa discussione:

**A:** «Sembra una retta.»

**B:** «Però qui si piega un po'. Se prendo i fogli e li unisco insieme potrebbe essere una specie di S.»<sup>4</sup>

[*Lo studente prende i fogli e li unisce, mostrando la nuova figura.*]

**C:** «Però i fogli sono staccati.»

**Docente:** «Se poteste continuare il disegno, come pensate che proseguirebbe?»

**B:** «Sarebbe speculare.»

**Docente:** «Speculare a chi?»

**C:** «[*Dopo qualche secondo di silenzio*] Rispetto al disegno sotto. Cioè, uguale al disegno sotto.»

**A:** «No, verrebbe uguale alla prima parte, ma specchiata.»

[*Lo studente imita il movimento dell'asta, indicando con il dito il disegno ipotizzato.*]

<sup>4</sup>I ragazzi erano dotati di due fogli per limitazioni della macchina: essendoci due viti fissate sulla base di legno, non è possibile inserire un unico foglio sulla macchina, ma è necessario l'utilizzo di due fogli, uno alla destra e uno alla sinistra delle viti.

**B:** «Così viene un'iperbole.»

[*Gli studenti sono soddisfatti della conclusione e la riportano nella scheda.*]

La ricerca dell'equazione cartesiana può risultare complessa, soprattutto per studenti che non hanno mai visto questo tipo di dimostrazione (essa è riportata nella Sezione 3.2.2). Gli studenti hanno comunque espresso il desiderio di ricavarla. Hanno dunque scelto un apposito sistema di riferimento, il medesimo proposto nella Sezione 3.2.2, e hanno iniziato a impostare il problema. Dato che l'impostazione del problema è simile a quella della lemniscata, i due gruppi che avevano tali curve si sono aiutati a vicenda; tale aspetto viene descritto più nel dettaglio nella Sezione 4.2.5. Siccome il giorno precedente era stato usato il secondo teorema di Euclide, inizialmente i ragazzi hanno cercato di utilizzare lo stesso teorema anche in questo caso. Ritenevano, infatti, che il triangolo formato dalla punta della matita e dai due perni fosse rettangolo. Si sono presto accorti della falsità di tale affermazione, ma non sapendo come procedere hanno chiesto aiuto ai docenti. Partendo dal disegno da loro realizzato e riportato in Figura 4.10, è stato suggerito loro di concentrarsi sulla definizione che avevano dato come luogo geometrico e sui triangoli che venivano formati dai fuochi, dalla punta della matita e dalla proiezione della punta della matita sull'asse  $x$ .

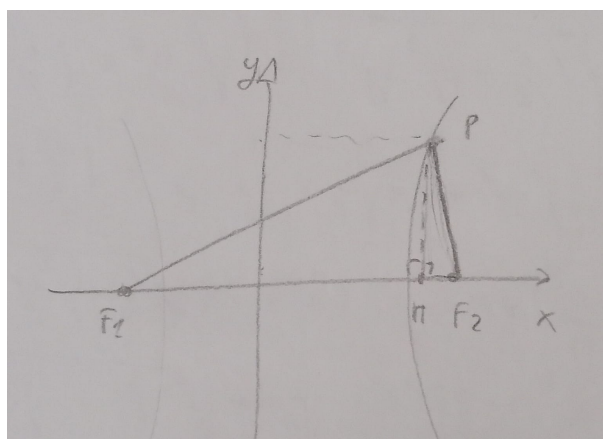


Figura 4.10: Disegno realizzato per lo studio dell'equazione cartesiana.

Con qualche difficoltà, sono riusciti a impostare il problema nel modo corretto, imponendo  $PA - PB = \text{cost}$  e utilizzando il teorema di Pitagora in modo opportuno. A questo punto hanno cercato di svolgere alcuni calcoli per arrivare all'equazione canonica dell'iperbole, ma è stato necessario il mio aiuto,



soprattutto nel passaggio di isolamento di una radice, che effettivamente non è facilmente intuibile. È stato comunque lodevole il loro approccio: non si sono demoralizzati davanti ad errori o a blocchi, ma si sono impegnati per giungere alla soluzione, arrivando a rimanere qualche minuto dopo la fine della lezione per terminare i calcoli.

#### 4.2.5 Analisi della scheda D: la lemniscata di Bernoulli

La macchina che disegna la lemniscata di Bernoulli ha un limite: le aste che compongono lo strumento tendono a non rimanere nella posizione necessaria per disegnare la lemniscata. In questo modo non si ottiene la curva cercata, ma altre curve o figure geometriche, come si mostra nella Figura 4.11, in cui sono riportate le foto di alcuni tentativi dei ragazzi. Nonostante ciò, si è voluto lasciare gli studenti liberi di esplorare la macchina anche per osservarne i limiti e le difficoltà, in modo che apparissero più chiari successivamente i vantaggi dell'utilizzo del software Geogebra.

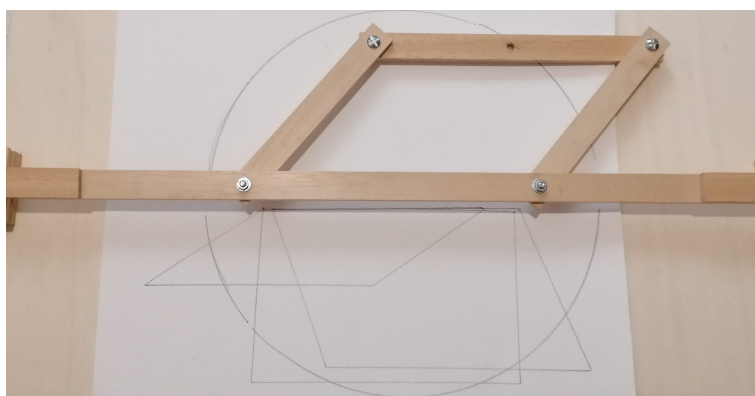


Figura 4.11: Tentativi degli studenti per capire il funzionamento della macchina.

Gli studenti hanno immediatamente provato ad utilizzare la macchina, arrivando a tracciare una circonferenza. Si sono presto resi conto che, sebbene fosse possibile utilizzare la macchina con quello scopo, essa era troppo complessa perché potesse costruire solo quella figura. Hanno così proceduto disegnando diversi parallelogrammi prima di osservare che la posizione delle aste tendeva a cambiare se non si prestava particolare attenzione. Hanno così posto le aste in modo che si formasse un antiparallelogramma e hanno disegnato la curva in modo che le aste non cambiassero posizione erroneamente. Sono così giunti al disegno della lemniscata.

La risposta alla seconda domanda mostra un tentativo di descrizione della curva senza conoscere termini tecnici e formali, come si osserva in Figura 4.12.

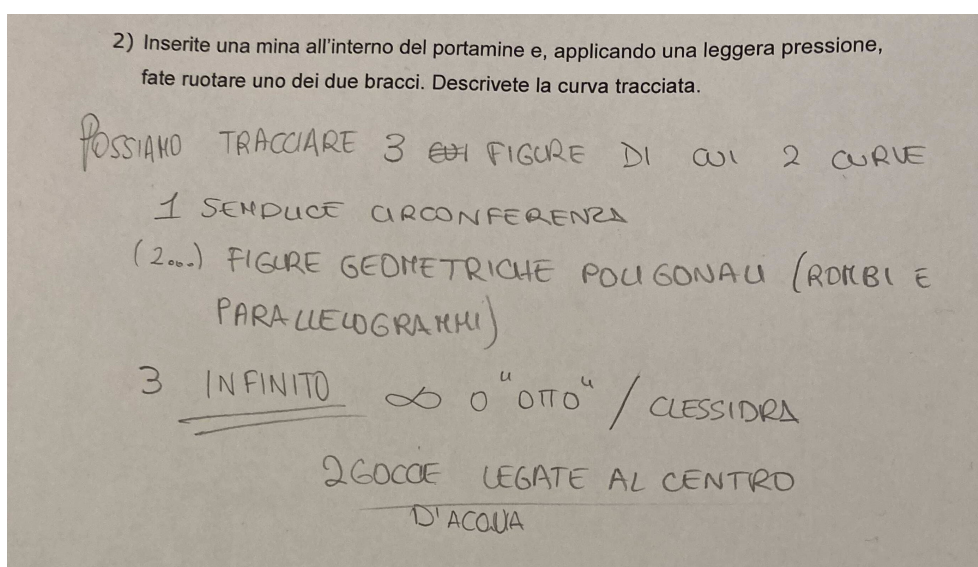


Figura 4.12: Risposta alla domanda 2).

Come emerso anche dalla discussione, la difficoltà maggiore è stata la mancanza di vocaboli per descrivere la curva, che ha portato gli studenti all'utilizzo di oggetti comuni e conosciuti per descrivere il disegno ottenuto. Gli studenti hanno iniziato a comprendere l'importanza di un linguaggio formale e rigoroso per potersi capire tra di loro ed esprimere ciò che volevano dire.

I ragazzi hanno capito subito che si trattava di una curva che non avevano mai visto prima: è interessante notare che non hanno espresso come ipotesi il fatto che potessero essere due ellissi unite tra loro. Ritenendo che fosse una curva mai vista, hanno mostrato molto interesse nella ricerca della definizione come luogo geometrico. Tuttavia, durante le misurazioni della prima lezione gli studenti sono arrivati ad affermare che sia il prodotto che la somma delle distanze tra i due perni e la punta della matita rimanevano costanti, come si osserva in Figura 4.13, ponendosi così dei dubbi sulla definizione. Qui emerge un limite dell'utilizzo di materiali concreti: l'approssimazione nelle misurazioni è necessaria. Nella lemniscata, però, la somma delle distanze tra i due perni e la punta della matita varia di circa un centimetro, perciò è normale che gli studenti approssimino troppo e arrivino alla conclusione scorretta.

|   |                               |                    |
|---|-------------------------------|--------------------|
| 10. Prodotto delle distanze tra i due perni e la punta della matita <sup>10</sup> |                               | $7 \times 14 = 98$ |
| 11. Differenza delle distanze tra i due perni e la punta della matita             | $18 - 5 = 13$<br>$14 - 7 = 7$ |                    |
| 12. Somma delle distanze tra i due perni e la punta della matita                  |                               | $14 + 7 = 21$      |

Figura 4.13: Risposta alla domanda 4).

In seguito, durante la discussione è emerso che la somma non rimane costante, sebbene la differenza tra le misurazioni sia poca: questo spunto ha permesso di evidenziare i limiti fisici e i vincoli presenti nelle macchine, permettendo di chiarire l'importanza e l'utilità di un software per ottenere disegni più precisi. Un altro elemento da sottolineare è la figura riportata nella domanda 3) della scheda: essa non è risultata molto chiara ai ragazzi, che hanno spesso formulato domande riguardo alla notazione e a come associare l'immagine alla macchina. Forse bisognerebbe ripensare al disegno da inserire, magari utilizzando colori diversi o ponendo i bracci in maniera meno simmetrica.

Per quanto riguarda la ricerca dell'equazione cartesiana, l'impostazione del problema è analoga a quella dell'iperbole. In effetti, sono stati riscontrati gli stessi dubbi e le stesse difficoltà emerse con il gruppo che analizzava l'iperbolografo a filo, a tal punto che i due gruppi si sono aiutati a vicenda per arrivare ad una soluzione finale. Dopo aver osservato alcuni triangoli che emergevano dalla figura da loro disegnata, come si può vedere dalla Figura 4.14, questo gruppo ha ipotizzato per primo di considerare la proiezione della punta della matita sull'asse delle ascisse. Anche loro hanno subito ipotizzato l'utilizzo dei teoremi di Euclide, memori dei calcoli fatti il giorno precedente per il parabolografo di Cavalieri, ma in seguito sono stati indirizzati dal gruppo C verso il teorema di Pitagora. Dalla definizione come lemniscata sono riusciti a ricavare infine l'equazione cartesiana.



scrivere attentamente la parabola, formulando anche ipotesi sull'andamento all'infinito che risultano scorrette.

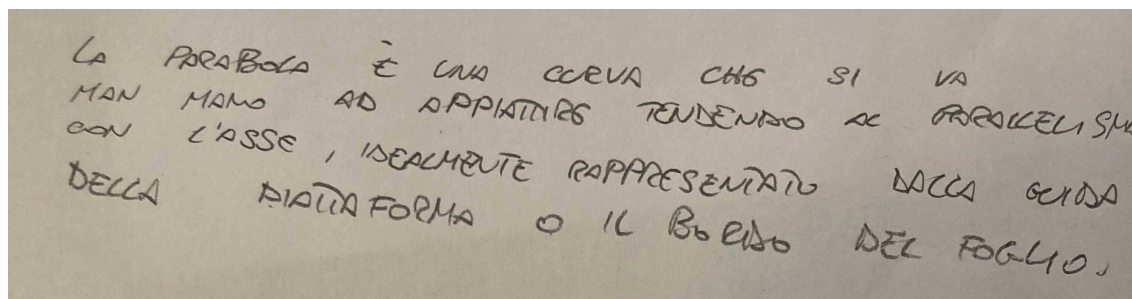


Figura 4.16: Risposta alla domanda 2).

Questo mostra il fatto che gli studenti non avessero effettivamente chiaro il concetto di parabola, come è emerso durante la discussione insieme: sono state formulate diverse domande riguardanti la differenza tra la parabola e la curva kappa, arrivando a comprendere il significato di asintoto e il loro andamento all'infinito. Emerge così un importante obiettivo dell'insegnante: egli deve far capire agli studenti che il linguaggio formale e il significato dei termini usati devono essere calati nel contesto in cui ci si trova: spesso gli studenti abusano dei termini, oppure imparano a memoria formule e definizioni senza capire veramente quello che esse vogliono comunicare. Il docente deve accertarsi che i ragazzi arrivino a comprenderne a fondo il significato, fino ad arrivare a essere in grado di applicare le nozioni acquisite a problemi.

Sia il primo gruppo, sia il secondo gruppo erano convinti di aver disegnato un arco di parabola. Per stimolarli nella seconda parte della lezione, è stato detto loro che solo uno dei due disegni rappresentava una parabola, mentre l'altro era una curva non conosciuta dagli studenti. Attraverso la tabella della scheda consegnata loro, gli studenti hanno affrontato le opportune misurazioni, arrivando alla definizione della curva come luogo geometrico. Altro aspetto interessante è che la definizione era stata riportata oralmente in modo corretto dal gruppo durante l'esposizione ai compagni, mentre risulta meno chiara sul foglio consegnato, come si può osservare in Figura 4.17. Le motivazioni possono essere molteplici: forse non avevano ancora compreso a fondo la definizione, oppure, siccome la lezione era quasi finita, hanno riportato velocemente le loro conclusioni in maniera imprecisa e incompleta.



|                 | VARIA           |                 | NON VARIA  |
|-----------------|-----------------|-----------------|------------|
| 1. Lunghezza QP |                 |                 | 4 cm       |
| 2. Lunghezza PO | 10 cm           | 6 cm            |            |
| 3. Lunghezza QO | 11 cm           | 7 cm            |            |
| 4. Angolo OQP   | $\sim 69^\circ$ | $\sim 55^\circ$ |            |
| 5. Angolo QOP   | $\sim 21^\circ$ | $\sim 35^\circ$ |            |
| 6. Angolo QPO   |                 |                 | $90^\circ$ |

Quale potrebbe essere la definizione di tale curva come luogo geometrico?

(Una CURVA  $\leftarrow K$ )  
 È TRACCIATA DA DEI TRIANGOLI  
 RETTANGOLI con un CATETO FISSO

Figura 4.17: Risposta alla domanda 4).

Per quanto riguarda la ricerca dell'equazione cartesiana, gli studenti hanno avuto poche difficoltà: memori del ragionamento fatto insieme con il parabografo di Cavalieri, hanno scelto con attenzione il sistema di riferimento, per poi proseguire con questo scambio:

A: «Questo è un triangolo rettangolo.»

B: «Allora possiamo usare Euclide.»

A: «Quale dei due?»

C: «Magari il secondo.»

A: «Poi possiamo scrivere questo segmento [Indicando il segmento formato da  $P$  e dalla sua proiezione sull'asse  $y$ ] come  $x$ .»

C: «E questo [Indicando il segmento formato da  $O$  e dalla proiezione di  $P$  sull'asse  $y$ ] è  $y$ .»

Hanno così trovato velocemente l'equazione cercata.

In questo gruppo si è visto un grande miglioramento nel corso delle giornate: inizialmente cercavano di richiamare a sé nozioni e conoscenze cercando di applicarle senza motivazioni solide, con il tempo hanno iniziato a sfruttarle in maniera corretta unite ad un'osservazione attenta della macchina.

#### 4.2.7 Analisi della scheda F: la concoide di Nicomede

Un limite della macchina che è emerso durante la fase esplorativa è stata la sua delicatezza: il perno, che dovrebbe rimanere fisso, tendeva a staccarsi. Perciò, è stato reso necessario l'uso della vinavil alcune volte per aggiustarla. Il problema potrebbe essere dovuto a limiti di progettazione, o all'utilizzo di un listello di legno invece che di un chiodo o di una struttura più resistente. A parte questa difficoltà tecnica, gli studenti hanno intuito velocemente il funzionamento della macchina. Subito dopo, è stato osservato il tentativo di associare la curva a immagini già conosciute, come si nota nella risposta alla prima domanda, riportata in Figura 4.18.

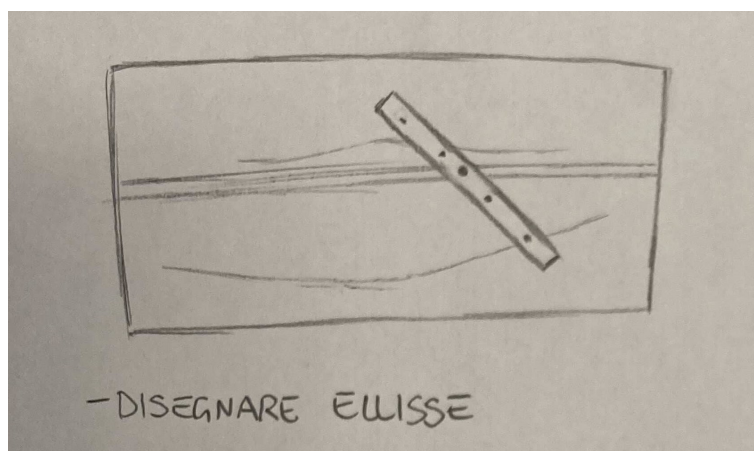


Figura 4.18: Risposta alla domanda 1).

I ragazzi hanno suggerito che la macchina disegnasse due curve, una non conosciuta e un'ellisse. Alla mia richiesta di giustificare le loro ipotesi, hanno risposto che "ci assomiglia", senza riuscire ad elaborare ulteriormente il ragionamento.

Interessante è stato anche l'approccio alla seconda domanda. Gli studenti, inizialmente, si sono trovati in forte difficoltà: dopo avermi chiamato, hanno chiesto in che senso dovessero descrivere la curva. Ho cercato di dar

loro poche indicazioni per non forzarli nel ragionamento, e ho semplicemente detto loro di descrivere a parole loro la curva: assomiglia a qualcosa? Ha delle caratteristiche particolari da riportare? Un po' dubbiosi, hanno osservato il disegno, e hanno nominato alcuni oggetti che associavano alla curva, come è riportato in Figura 4.19.

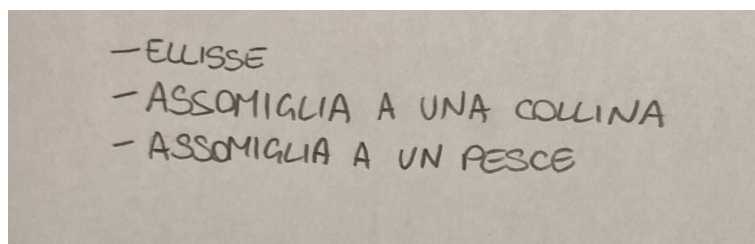


Figura 4.19: Risposta alla domanda 2).

Il dubbio degli studenti emergeva proprio dalla mancanza di termini formali per poterla descrivere. Infatti, durante il ragionamento, vi è stato questo scambio:

**A:** «A cosa assomiglia?»

**B:** «Non so. Questa parte sembra un'ellisse, o una parabola.»

*[Indica la porzione di curva sotto ai binari fissi della macchina.]*

**A:** «Ok, quella è un'ellisse, allora quella sopra che curva è?»

**B:** «Non mi sembra nessuna curva.»

**A:** «Quindi cosa facciamo?»

*[Guardano la docente, in attesa che dica qualcosa.]*

**Docente:** «Pensate che abbia delle caratteristiche particolari da riportare?»

*[Danno una veloce occhiata alla curva, ma non sembrano convinti.]*

**Docente:** «Assomiglia a qualche oggetto che conoscete?»

**B:** «La parte sotto è un'ellisse, quella sopra non sembra niente.»



**Docente:** «Non preoccupatevi di usare termini formali, provate a descriverla a parole vostre. Potrebbe assomigliare a oggetti di tutti i giorni?»

**B:** «Come una goccia?»

[*A un cenno di assenso, gli studenti sembrano più tranquilli.*]

**A:** «Un pesce, qui.»

[*Indica con il dito sul foglio la porzione di disegno che secondo lui assomiglia ad un pesce.*]

**B:** «Va bene, va bene, scrivi. Anche una collina, magari.»

Come riportato anche nella Sezione 4.2.1, è emerso un bisogno di utilizzare termini formali anche senza comprenderne il significato. In mancanza di essi, hanno cercato di usare vocaboli che richiamassero elementi quotidiani, in modo da poter associare la curva a oggetti conosciuti.

Per quanto riguarda la ricerca dell'equazione cartesiana, lo studente di terza superiore era assente, per cui il ragazzo di terza media era rimasto da solo. Ho, dunque, deciso di aiutarlo nel ragionamento rimanendo accanto a lui, mentre il professor Casali aiutava gli altri gruppi. Lo studente inizialmente ha avuto alcune difficoltà nel capire il motivo per cui stavamo cercando l'equazione cartesiana: si chiedeva a cosa potesse servire. Una parte dell'ora ha perciò riguardato tale spiegazione, introducendo il sistema di riferimento, le coordinate cartesiane e mostrando alcuni esempi già conosciuti come la retta. Per quanto riguarda i calcoli, lo studente ha avuto meno problemi: è stato abile ad utilizzare le informazioni emerse dalla macchina e dal disegno schematico per giungere all'equazione cercata. Tuttavia, il ragazzo è rimasto dubbioso per molto tempo sull'utilità di questi calcoli. In generale credo che gli studenti di scuola secondaria di primo grado siano troppo giovani per affrontare questa attività, ma se si vuole comunque preparare un percorso analogo bisognerebbe dedicare più ore ad un'introduzione approfondita sul piano cartesiano. Questo non è stato possibile, sia perché che gli studenti avevano un'età eterogenea, sia per l'esiguo numero di ore a disposizione.

### 4.2.8 Geogebra

L'ultimo giorno è stato dedicato all'uso di Geogebra. Nel corso delle giornate precedenti, erano spesso emersi i limiti e i vincoli delle macchine che impedivano un disegno preciso. Gli studenti avevano subito espresso queste difficoltà, perciò è stato un passaggio logico e necessario arrivare all'utilizzo di un software di geometria dinamica.

Quasi tutti gli studenti, tranne uno, avevano già usato Geogebra, di conseguenza l'introduzione è stata abbastanza breve e focalizzata sugli strumenti che in futuro avrebbero dovuto utilizzare. In seguito, divisi in gruppi, hanno cercato di costruire su Geogebra una delle due macchine che avevano studiato precedentemente.

Lo studente che non conosceva Geogebra ha subito iniziato a studiare il software con interesse, esplorandolo molto liberamente e facendo tentativi senza paura di sbagliare. Egli è stato, infatti, il primo a riuscire a costruire la macchina, la concoide di Nicomede, su Geogebra. Dopo aver costruito senza problemi la struttura generale, ovvero il perno fisso, i binari e l'asta, ha avuto qualche dubbio su come trovare i punti della concoide: consapevole della definizione come luogo, non sapeva come trovare due punti alla stessa distanza. Questo è stato lo scambio con il compagno di gruppo:

**A:** « $PM$  deve essere uguale  $MQ$ . Quindi devo mettere  $Q$  alla stessa distanza.»

**Docente:** «C'è una figura geometrica che può aiutarvi? In cui c'è una distanza che rimane fissata?»

**B:** «Forse con la simmetria assiale.»

[*Fissato un punto  $P$ , costruisce il punto  $Q$  simmetrico a  $P$  rispetto all'asse  $x$ .*]

**B:** «No, così non viene.»

**A:** «Forse con un triangolo rettangolo.»

[*Prova, tramite il comando "Poligono", a costruire un triangolo rettangolo.*]

**B:** «E adesso?»

**A:** «No, non viene.»

[*Ragionano qualche minuto, riprovando le loro ipotesi e guardando gli strumenti a loro disposizione.*]

**A:** «Potremmo usare la circonferenza.»

[*Costruisce una circonferenza.*]

**A:** «Così viene!»

[*Giunti alla soluzione, iniziano a provare vari comandi per abbellire il disegno.*]

In tutti i gruppi è emersa la difficoltà nell'intuire che la circonferenza permette di individuare segmenti di lunghezza fissata. Ad esempio, vi è stata una conversazione simile a quella precedente anche con il gruppo che stava costruendo l'ellissografo:

**A:** «Ho fissato il punto  $A$ , ora  $B$  lo devo fissare sull'asse  $x$ .»

**B:** «Se metto "Punto(asseX)" viene sull'asse, poi posso costruire il segmento che congiunge  $A$  e  $B$ .»

**A:** «Però  $B$  non si muove insieme ad  $A$ , nella macchina si muoveva, come li posso legare tra di loro?.»

**Docente:** «La distanza tra  $A$  e  $B$  è costante o varia?.»

**B:** «Rimane costante.»

**Docente:** «C'è una figura geometrica che potrebbe aiutarvi?»

**A:** «La circonferenza?»

**B:** «Poi usiamo il comando "Intersezione".»

Dalle domande poste dagli studenti e dalle difficoltà riscontrate, sembra che i fogli consegnati come supporto all'attività non siano stati di particolare aiuto: nonostante fossero presenti gli stessi suggerimenti dati a voce, la mia

presenza accanto ha molto rassicurato i ragazzi che hanno ascoltato con più attenzione i consigli dati. Forse si potrebbe modificare il testo della scheda, o ipotizzare di non dare loro alcun foglio ma limitarsi ad aiutarli nel corso del laboratorio. Un'altra soluzione possibile potrebbe essere quella adottata per la costruzione della lemniscata: su esplicita richiesta dei ragazzi, è stata realizzata insieme la costruzione della macchina su Geogebra. Ho proiettato alla lavagna la Suite Calcolatrici di Geogebra e mi sono fatta istruire da loro sui comandi da utilizzare. Si è, dunque, arrivati insieme alla soluzione. Da una parte, il vantaggio è stato che si è potuto osservare con attenzione il grado di comprensione degli studenti, il loro interesse e la loro partecipazione. Dall'altra, sebbene nel corso delle giornate la partecipazione sia aumentata sempre di più, si è comunque potuto osservare come a gruppi gli studenti si sentissero più liberi di fare tentativi ed eventualmente sbagliare, perciò durante la fase di costruzione insieme sono apparsi più timorosi di fare errori; erano meno propensi a provare a suggerire soluzioni e ragionamenti e tendevano ad attendere le mie domande e i miei consigli per procedere con la costruzione.

### 4.3 Conclusioni finali

Proporre questo percorso a studenti così giovani ha sicuramente avuto svantaggi e aspetti positivi. La difficoltà principale è stato il loro limitato bagaglio culturale, che non ha permesso di approfondire troppo l'argomento, come invece sarebbe possibile fare attraverso le macchine matematiche. Non sono state nominate le equazioni parametriche, così come non si è parlato con troppa profondità dell'aspetto storico delle macchine. Se si proponesse un percorso analogo a studenti che hanno già studiato a scuola le coniche, si potrebbero affrontare aspetti come i problemi classici dell'antichità in funzione delle curve che vengono loro presentate, oppure si potrebbe manipolare maggiormente la figura attraverso l'uso di Geogebra. Per queste ragioni, consiglierei questo progetto, con le opportune modifiche per stimolare i ragionamenti e limitare i problemi emersi dalle schede, a ragazzi del quarto anno della scuola secondaria di secondo grado. Più che come introduzione alle coniche, sarebbe più fruttuoso come approfondimento e soprattutto studio di curve di grado maggiore, che potrebbe suscitare interesse e curiosità.

Un aspetto di cui tenere conto è stata l'abilità di tutti gli studenti nell'utilizzo di Geogebra. Presentare tale software fin dal primo anno della scuola secondaria di secondo grado potrebbe aiutarli ad imparare velocemente la

manipolazione di oggetti geometrici, elemento fondamentale per arrivare ad un controllo teorico sulle immagini, come emerso nel Capitolo 1.

# Appendice A

## Schede delle attività laboratoriali

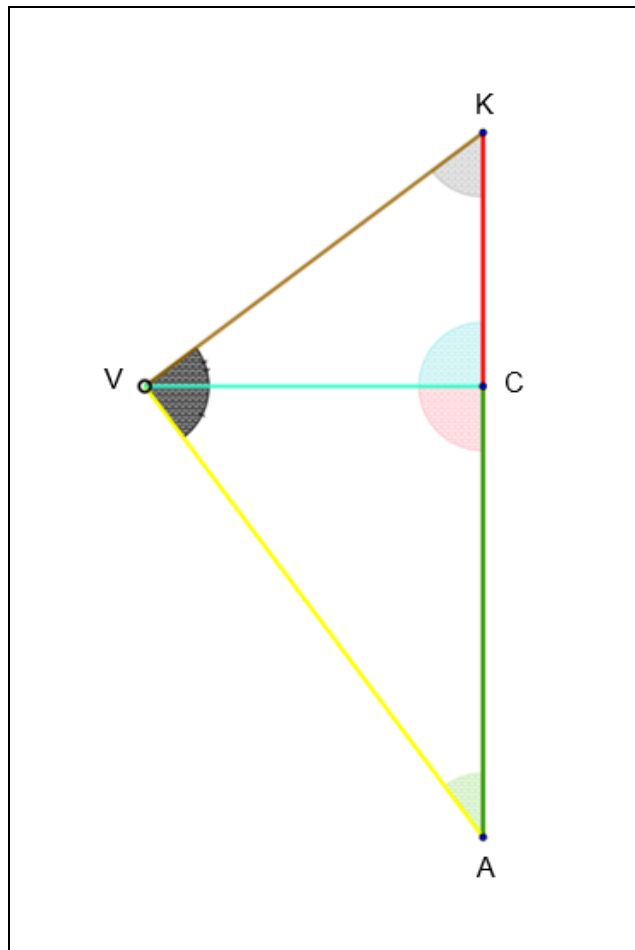
In questa appendice sono riportate le schede guida progettate ed utilizzate durante l'attività laboratoriale, che è stata descritta in maniera approfondita del Capitolo 3. Le schede sono tutte strutturate allo stesso modo: si dividono in quattro parti (fase esplorativa, ricerca del luogo geometrico, ricerca dell'equazione cartesiana, uso di Geogebra) e si differenziano per il tipo di macchina a cui sono associate. In ordine, le schede si riferiscono alle seguenti macchine: il parabolografo di Cavalieri, l'ellissografo di Proclo, l'iperbolografo a filo, la lemniscata di Bernoulli, la curva kappa e la concoide di Nicomede.

## SCHEDA A

- 1) Fate un disegno schematico della macchina e descrivetela in ogni suo elemento. Come pensate si possa utilizzare? Fate delle ipotesi sul suo funzionamento e riportatele sul foglio.

2) Inserite una mina all'interno del portamine e, applicando una leggera pressione, tracciate la curva. Descrivete la curva tracciata.





3) Pensate che possa essere una curva che conoscete? Come giustifichereste la vostra risposta?

4) Che cosa rimane costante e cosa no durante il movimento della macchina?

Completate la seguente tabella dicendo se l'oggetto in questione varia oppure no. Se ritenete che l'oggetto non vari, misuratelo e scrivete nello spazio sottostante il suo valore. Se invece pensate che vari, riportate nella prima colonna almeno due valori diversi dello stesso oggetto.

|                              | VARIA | NON VARIA |
|------------------------------|-------|-----------|
| 1. Lunghezza del segmento VK |       |           |
| 2. Lunghezza del segmento VA |       |           |

|  |  |  |
|--|--|--|
| 3. Lunghezza del segmento VC                         |  |  |
| 4. Lunghezza del segmento AC                         |  |  |
| 5. Lunghezza del segmento CK                         |  |  |
| 6. Ampiezza dell'angolo VAC                          |  |  |
| 7. Ampiezza dell'angolo VCA                          |  |  |
| 8. Ampiezza dell'angolo AVK                          |  |  |
| 9. Distanza tra il punto A e il bordo della macchina |  |  |
| 10. Distanza tra V e il bordo della macchina         |  |  |

Dopo aver calcolato la distanza tra il punto A e il bordo della macchina, ponete sull'asse su cui giace il segmento AC un segno in corrispondenza del punto che si trova alla stessa distanza da A e chiamatelo F. Misurate ora il segmento VF.

Quale potrebbe essere la definizione della curva come luogo geometrico?

5) Per ricavare l'equazione cartesiana, cerchiamo un sistema di riferimento opportuno. Quale segmento della macchina potrebbe giacere sull'asse delle ordinate? Dove potreste porre l'origine degli assi?

6) Osservate ora il triangolo AVK. Partendo da quale teorema dei triangoli rettangoli si può ricavare l'equazione cartesiana cercata?

## COSTRUZIONE DEL PARABOLOGRAFO DI CAVALIERI SU GEOGEBRA

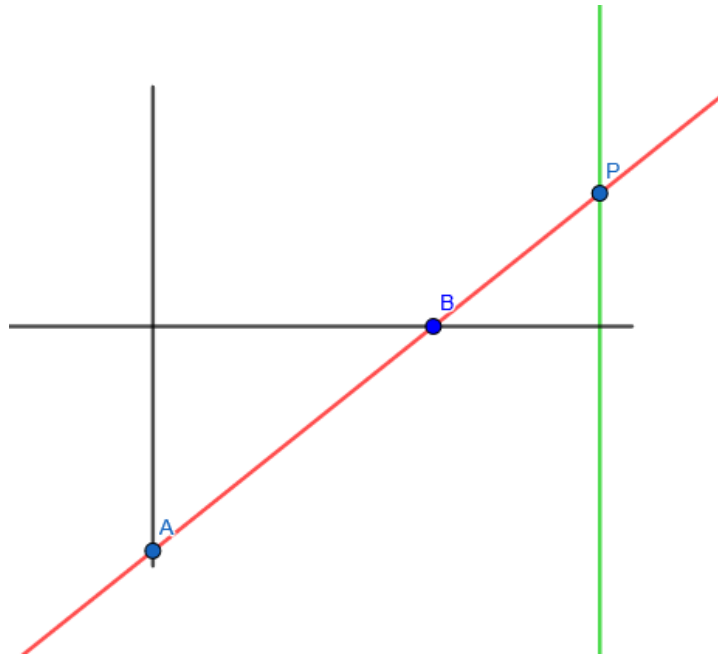
<https://www.geogebra.org/m/ed9xkvzw>

- Fissate il vertice a piacere e una retta perpendicolare all'asse x che rappresenta il segmento BD della macchina matematica. Sia C un punto della semiretta: esso si sposterà lungo la semiretta in maniera analoga al punto C nel parabolografo.
- Il punto B è vincolato al punto C, ovvero se C si sposta, anche B si sposta. In particolare, rimane costante la distanza tra due punti. Come potreste rappresentare questo su Geogebra? Quale luogo geometrico potrebbe aiutarvi?
- Ora bisogna costruire il triangolo rettangolo che compone la macchina. Dal momento che si tratta di un triangolo rettangolo, è inscritto a una circonferenza: quale?
- Come trovo ora il punto A?

## SCHEDA B

- 1) Fate un disegno schematico della macchina e descrivetela in ogni suo elemento.  
Come pensate si possa utilizzare? Fate delle ipotesi sul suo funzionamento e riportatele sul foglio.

- 2) Inserite una mina all'interno del portamine e, applicando una leggera pressione, tracciate la curva facendo scorrere uno dei due cilindri in legno lungo un binario e il secondo cilindro lungo il secondo binario. Descrivete la curva tracciata.



3) Pensate che possa essere una curva che conoscete? Come giustificereste la vostra risposta?

4) Che cosa rimane costante e cosa no durante il movimento della macchina?  
 Completate la seguente tabella dicendo se l'oggetto in questione varia oppure no.  
 Se ritenete che l'oggetto non vari, misuratelo e scrivete nello spazio sottostante il suo valore. Se invece pensate che vari, riportate nella prima colonna almeno due valori diversi dello stesso oggetto.

|                              | VARIA | NON VARIA |
|------------------------------|-------|-----------|
| 1. Lunghezza del segmento AB |       |           |
| 2. Lunghezza del segmento PB |       |           |
| 3. Lunghezza del segmento PA |       |           |

|  |  |  |
|--|--|--|
| 4. Ampiezza dell'angolo delimitato da A e dall'asse verticale        |  |  |
| 5. Ampiezza dell'angolo delimitato da B e dall'asse orizzontale      |  |  |
| 6. Prodotto delle distanze tra i due perni e la punta della matita   |  |  |
| 7. Somma delle distanze tra i due perni e la punta della matita      |  |  |
| 8. Differenza delle distanze tra i due perni e la punta della matita |  |  |

Quale potrebbe essere la definizione della curva come luogo geometrico?



5) Per ricavare l'equazione cartesiana, cerchiamo un sistema di riferimento opportuno. Quale segmento della macchina potrebbe giacere sull'asse delle ordinate? Quale segmento potrebbe giacere sull'asse delle ascisse?

6) Considerate i due triangoli formati da un punto  $P$  della curva, i perni e la proiezione di  $P$  sull'asse  $x$  e la proiezione di  $P$  sull'asse  $y$ . Partendo da essi, quale equazione cartesiana si riesce a ricavare?

## COSTRUZIONE DELL'ELLISSOGRAFO DI PROCLO SU GEOGEBRA

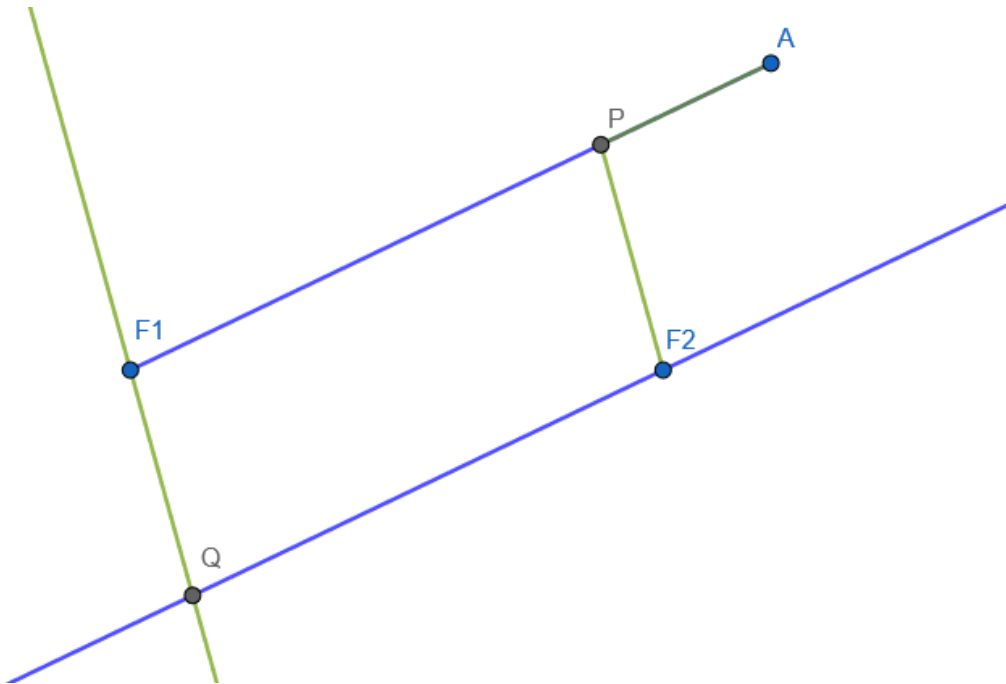
<https://www.geogebra.org/calculator/bjv2cggb>

- Prendete un punto sull'asse y: esso sarà il punto da far scorrere lungo l'asse per costruire l'ellisse.
- Ora bisogna costruire il punto che nella macchina corrisponde a .... Esso si muove lungo l'asse x e mantiene sempre la stessa distanza da A. Come potreste rappresentare questo su Geogebra? Quale luogo geometrico potrebbe aiutarvi?
- Ora bisogna costruire l'asse che si sposta: come?

## SCHEDA C

- 1) Fate un disegno schematico della macchina e descrivetela in ogni suo elemento. Come pensate si possa utilizzare? Fate delle ipotesi sul suo funzionamento e riportatele sul foglio.

- 2) Tenete con la punta di una matita il primo filo all'asta rigida e analogamente il secondo filo teso accostato all'asta e fate ruotare le aste attorno ai loro perni. Descrivete la curva tracciata.



3) Pensate che possa essere una curva che conoscete? Come giustifichereste la vostra risposta?

4) Che cosa rimane costante e cosa no durante il movimento della macchina?

Completate la seguente tabella dicendo se l'oggetto in questione varia oppure no. Se ritenete che l'oggetto non vari, misuratelo e scrivete nello spazio sottostante il suo valore. Se invece pensate che vari, riportate nella prima colonna almeno due valori diversi dello stesso oggetto.

|   | VARIA | NON VARIA |
|---|-------|-----------|
| 1. Lunghezza del filo                               |       |           |
| 2. Distanza tra i perni                             |       |           |
| 3. Distanza tra la punta della matita e il perno F1 |       |           |

|  |  |  |
|--|--|--|
| 4. Distanza tra la punta della matita e il perno F2                  |  |  |
| 5. Lunghezza del segmento AP   |  |  |
| 6. Somma delle distanze tra i due perni e la punta della matita      |  |  |
| 7. Differenza delle distanze tra i due perni e la punta della matita |  |  |

Quale potrebbe essere la definizione della curva come luogo geometrico?

5) Per ricavare l'equazione cartesiana, cerchiamo un sistema di riferimento opportuno. Dove potreste porre i perni della macchina? Dove potreste porre l'origine degli assi?

6) Considerate i segmenti PF1 e PF2. Come si può ricavare l'equazione cartesiana?

## COSTRUZIONE DELL'IPERBOLOGRAFO SU GEOGEBRA

<https://www.geogebra.org/calculator/ymz6vkr3>

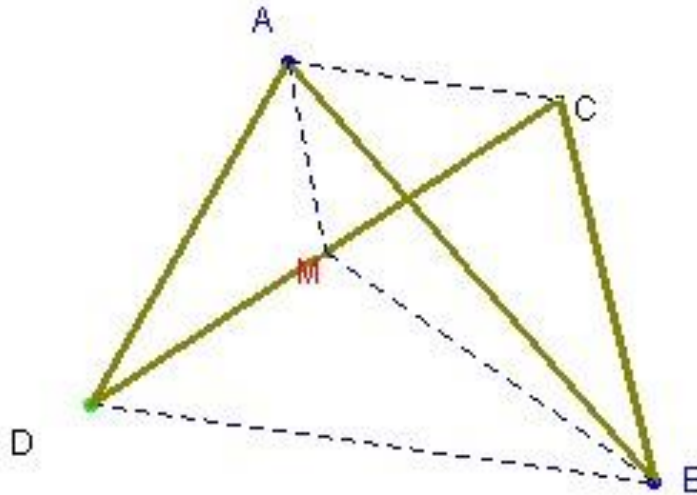
- Dopo aver fissato i fuochi a piacimento, costruite una delle due aste, che deve essere vincolata al fuoco e di lunghezza costante fissata. Come potete costruire la seconda asta?
- Fissate ora un punto N a piacimento nella prima asta: cosa potete dire sulla distanza dal fuoco a N?
- La lunghezza del filo corrisponde alla distanza tra N e il secondo vertice dell'asta. Come si può trovare il punto P? *Suggerimento: costruite il segmento dal punto N al secondo fuoco (sulla seconda asta).*



## SCHEDA D

- 1) Fate un disegno schematico della macchina e descrivetela in ogni suo elemento. Come pensate si possa utilizzare? Fate delle ipotesi sul suo funzionamento e riportatele sul foglio.

2) Inserite una mina all'interno del portamine e, applicando una leggera pressione, fate ruotare uno dei due bracci. Descrivete la curva tracciata.



3) Pensate che possa essere una curva che conoscete? Come giustifichereste la vostra risposta?

4) Che cosa rimane costante e cosa no durante il movimento della macchina?  
 Completate la seguente tabella: se ritenete che l'oggetto non vari, misuratelo e scrivete il valore nella seconda colonna. Se invece pensate che vari, riportate nella prima colonna almeno due valori diversi dello stesso oggetto.

|                              | VARIA | NON VARIA |
|------------------------------|-------|-----------|
| 1. Distanza tra i due perni  |       |           |
| 2. Lunghezza del segmento AD |       |           |
| 3. Lunghezza del segmento CD |       |           |

|   |  |  |
|---|--|--|
| 4. Lunghezza del segmento BC  |  |  |
| 5. Lunghezza del segmento AC  |  |  |
| 6. Lunghezza del segmento BD  |  |  |
| 7. Lunghezza del segmento MD  |  |  |
| 8. Lunghezza del segmento AM  |  |  |
| 9. Lunghezza del segmento BM  |  |  |
| 10. Prodotto delle distanze tra i due perni e la punta della matita   |  |  |
| 11. Differenza delle distanze tra i due perni e la punta della matita |  |  |
| 12. Somma delle distanze tra i due perni e la punta della matita      |  |  |

Quale potrebbe essere la definizione di tale curva come luogo geometrico?

5) Per ricavare l'equazione cartesiana, cerchiamo un sistema di riferimento opportuno. Dove potreste porre i perni della macchina? Dove potreste porre l'origine degli assi?

6) Considerate la proiezione di  $M$  sull'asse  $x$  e i triangoli  $MAM_x$  e  $MBM_x$ . Come si può ricavare l'equazione cartesiana?

## COSTRUZIONE DELLA LEMNISCATA DI BERNOULLI SU GEOGEBRA

<https://www.geogebra.org/calculator/bjsvzjns>

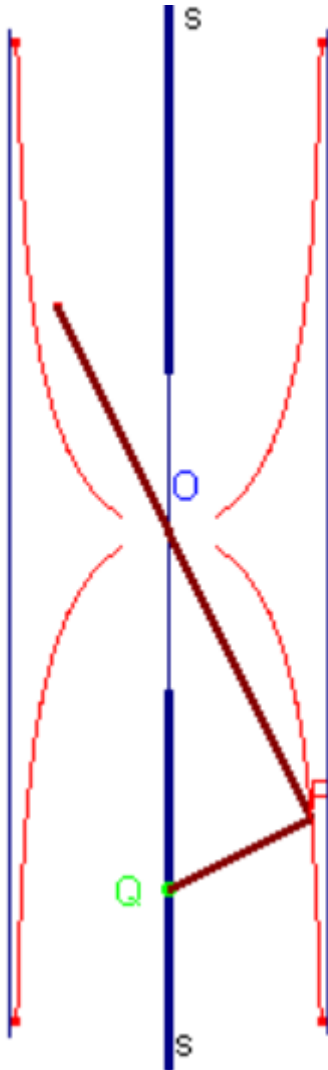
- Dopo aver fissato i fuochi a piacimento, costruite il punto D, ricordando che esso è a distanza costante da A e deve ruotare attorno al punto.
- Bisogna trovare il punto C che si trova a distanza fissata dal punto B e tale che il segmento AC è parallelo al segmento DB. Come potete fare?
- Qual è il punto da individuare per tracciare la curva?

## SCHEDA E

- 1) Fate un disegno schematico della macchina e descrivetela in ogni suo elemento. Come pensate si possa utilizzare? Fate delle ipotesi sul suo funzionamento e riportatele sul foglio.

- 2) Ponendo la matita in corrispondenza del vertice che forma un angolo retto, fate scorrere il punto vincolato a muoversi lungo un segmento. Descrivete la curva tracciata.





3) Pensate che possa essere una curva che conoscete? Come giustifichereste la vostra risposta?

4) Che cosa rimane costante e cosa no durante il movimento della macchina?

Completate la seguente tabella: se ritenete che l'oggetto non vari, misuratelo e scrivete il valore nella seconda colonna. Se invece pensate che vari, riportate nella prima colonna almeno due valori diversi dello stesso oggetto.

|                 | VARIA | NON VARIA |
|-----------------|-------|-----------|
| 1. Lunghezza QP |       |           |
| 2. Lunghezza PO |       |           |
| 3. Lunghezza QO |       |           |
| 4. Angolo OQP   |       |           |
| 5. Angolo QOP   |       |           |
| 6. Angolo QPO   |       |           |

Quale potrebbe essere la definizione di tale curva come luogo geometrico?

5) Per ricavare l'equazione cartesiana, cerchiamo un sistema di riferimento opportuno. Quale segmento della macchina potrebbe giacere sull'asse delle ordinate? Quale punto potrebbe corrispondere all'origine degli assi?

6) Osserviamo il triangolo QPO. Quale teorema possiamo usare per ricavare l'equazione cartesiana di tale curva?

## COSTRUZIONE DELLA CURVA KAPPA SU GEOGEBRA

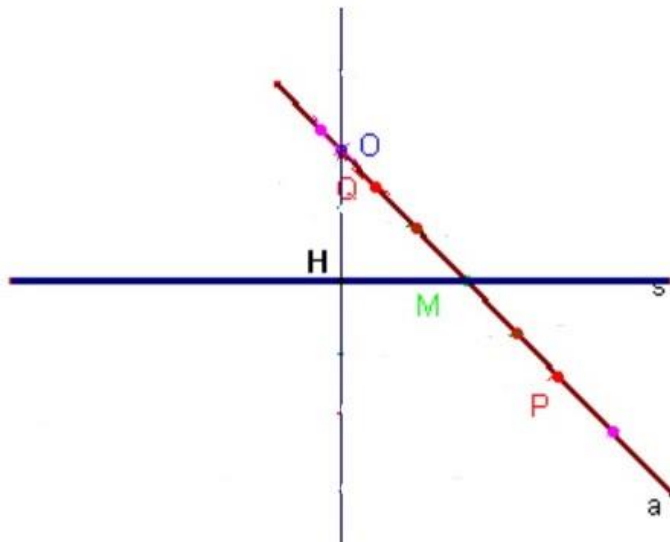
<https://www.geogebra.org/m/w7s3p84m>

- Bisogna costruire un triangolo rettangolo per trovare il punto P. Esso è inscritto in una particolare figura geometrica: quale?
- P corrisponde al vertice di una corda PQ di lunghezza fissata. Come si può costruire?

## SCHEDA F

- 1) Fate un disegno schematico della macchina matematica disegnando tutte le sue componenti. Come pensate si possa utilizzare? Fate delle ipotesi sul suo funzionamento e riportatele sul foglio.

2) Inserite una mina all'interno dei due portamine e fate scorrere il punto vincolato al segmento centrale lungo esso. Descrivete la curva tracciata.



3) Pensate che possa essere una curva che conoscete? Come giustifichereste la vostra risposta?

4) Che cosa rimane costante e cosa no durante il movimento della macchina?

Completate la seguente tabella: se ritenete che l'oggetto non vari, misuratelo e scrivete il valore nella seconda colonna. Se invece pensate che vari, riportate nella prima colonna almeno due valori diversi dello stesso oggetto.

|                              | VARIA | NON VARIA |
|------------------------------|-------|-----------|
| 1. Lunghezza dell'asta       |       |           |
| 2. Lunghezza del segmento OQ |       |           |
| 3. Lunghezza del segmento OH |       |           |
| 4. Lunghezza del segmento OM |       |           |
| 5. Lunghezza del segmento PM |       |           |

|                              |  |  |
|------------------------------|--|--|
| 6. Lunghezza del segmento QM |  |  |
| 7. Ampiezza dell'angolo OMH  |  |  |
| 8. Ampiezza dell'angolo HOM  |  |  |

Quale potrebbe essere la definizione di tale curva come luogo geometrico?



5) Per ricavare l'equazione cartesiana, cerchiamo un sistema di riferimento opportuno. Dove potreste porre l'origine degli assi? L'asse delle ordinate deve passare necessariamente per quel punto: a quale segmento della macchina potrebbe essere parallela?

6) Osserviamo i triangoli  $OMH$  e il triangolo formato da  $O$ ,  $P$  e la proiezione di  $P$  sull'asse  $X$ . Come sono i due triangoli? Hanno qualche tipo di relazione? Come pensate si possa ricavare l'equazione cartesiana?

## COSTRUZIONE DELLA CONCOIDE DI NICOMEDE

<https://www.geogebra.org/m/nahqrsvd>

- Dopo aver fissato il punto  $O$  nell'origine degli assi e la retta  $s$  a piacimento, prendiamo un punto  $M$  vincolato a muoversi sulla retta  $s$ . Per trovare i punti della concoide, dobbiamo trovare i punti sulla retta  $OM$  che abbiano distanza costante da  $M$ . Come potreste rappresentare questo su Geogebra? Quale luogo geometrico potrebbe aiutarvi?



## Appendice B

# Schede illustrative delle macchine matematiche

Di seguito si espongono le schede illustrative delle macchine prese in prestito dal Laboratorio delle Macchine Matematiche di Bologna, che si possono consultare sul sito <http://www.matlabrighibo.it/macchine-matematiche/>, e le schede illustrative delle macchine da me realizzate.

## PARABOLOGRAFO DI CAVALIERI

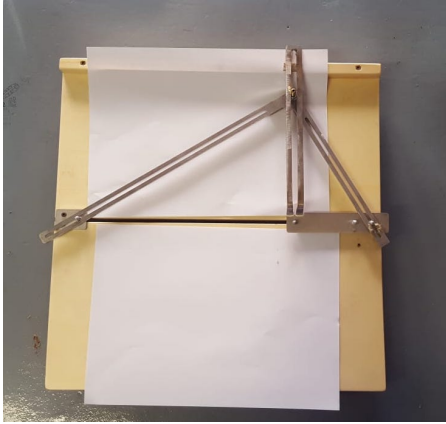


Figura 1. Fotografia del parabolografo di Cavalieri

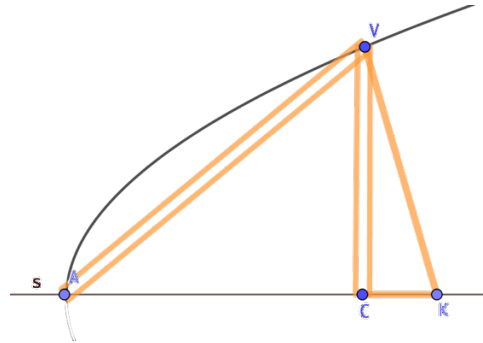


Figura 2. Immagine virtuale del parabolografo di Cavalieri

Numero di macchine presenti: 5

Dimensioni della macchina: cm 40x40x6

Descrizione della macchina: La macchina è composta da una piccola asta CK di lunghezza  $k$  prestabilita, che è vincolata a scorrere lungo una guida rettilinea  $s$ , incisa nel piano. All'estremo C del sistema articolato è vincolata rigidamente, in direzione perpendicolare a CK, un'asta CV, avente una scanalatura al centro e giacente sul piano da disegno. All'estremo V è infine vincolata un'asta AV, anch'essa con una scanalatura centrale, in modo tale che l'angolo AVK sia retto.

Funzionamento della macchina: Il parabolografo di Cavalieri funziona posizionando una punta scrivente nel punto V e muovendo l'angolo retto KCV, il quale nel suo movimento trascina con sé l'altro angolo retto AVK. Durante il movimento, AVK rimane sempre un triangolo rettangolo (anche se variabile) di cui VC rappresenta l'altezza relativa alla ipotenusa e AK l'ipotenusa. A questo triangolo è possibile applicare il teorema di Euclide, dal quale si ricava che  $VC^2 = CK \cdot CA = k \cdot CA$ ; ponendo quindi  $CA = x$  e  $VC = y$ , si ottiene l'equazione della parabola  $y^2 = k \cdot x$ . Facendo quindi scorrere l'angolo KCV lungo  $s$ , la punta descriverà proprio un arco della parabola di equazione  $y^2 = k \cdot x$ .

## PARABOLOGRAFO A FILO

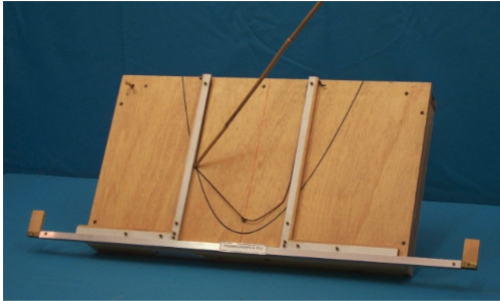


Figura 1 - Fotografia del parabolografo a filo

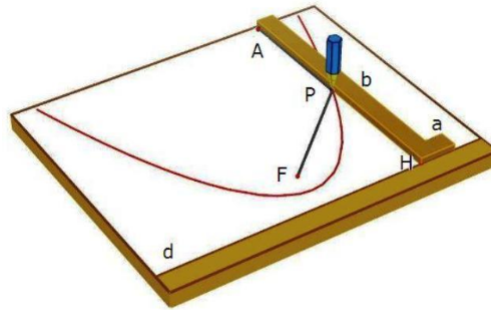


Figura 2 - Immagine virtuale del parabolografo a filo

Numero di macchine presenti: 5

Dimensioni della macchina: cm 40x40x6

Descrizione della macchina: una squadra costituita dalle aste perpendicolari a e b ha il lato a scorrevole su una guida rettilinea d; F è un perno fissato sul piano e A è un perno fissato su b. Un filo di lunghezza  $l = AH$  è vincolato nei suoi estremi ai punti A e F.

Funzionamento della macchina: se si fa scorrere a lungo d e contemporaneamente con la punta di una matita si mantiene il filo teso e accostato all'asta b (Fig. 2), si disegna un arco di parabola avente fuoco in F e direttrice coincidente con d. Questo perché  $PF = l - AP = AH - AP = PH$ , ossia il punto P è sempre equidistante da F e d (proprietà caratteristica della parabola).

## ELLISSOGRAFO A FILO

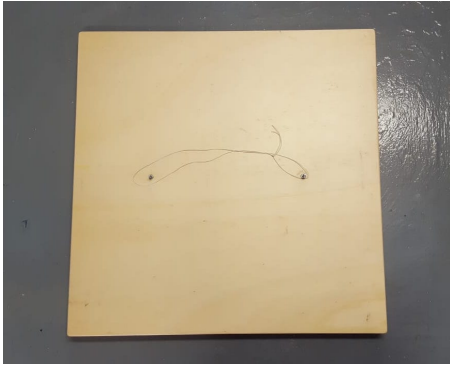


Figura 1. Fotografia dell'ellissografo a filo

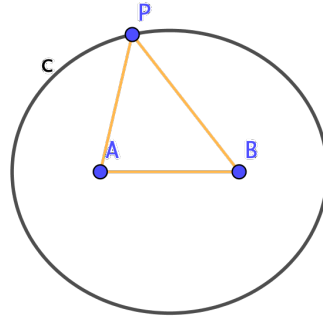


Figura 2. Immagine virtuale dell'ellissografo a filo

Numero di macchine presenti: 10

Dimensioni della macchina: cm 40x40x6

Descrizione della macchina: L'ellissografo a filo è composto da un semplice filo (non elastico, di lunghezza fissa  $l$ ) annodato ad anello attorno a due perni (corrispondenti ai punti A e B), fissati sul piano da disegno. La lunghezza  $l$  del filo deve essere maggiore della distanza fissata AB. (vedi Figura 2)

Funzionamento della macchina: La macchina si utilizza con l'ausilio di una punta scrivente posta in P, per mezzo della quale il filo viene teso fra i punti A e B, in modo da formare un triangolo APB (vedi Figura 2). La punta P si sposta quindi sul piano mantenendo il filo teso: essa traccia in questo modo un'ellisse i cui fuochi sono proprio A e B, in quanto per costruzione viene rispettata la proprietà caratteristica che la somma delle distanze da un qualsiasi punto P dai due fuochi A e B rimane costante (nel nostro caso  $PA + PB = l - AB = costante$ ).

## ELLISSOGRAFO DI PROCLO

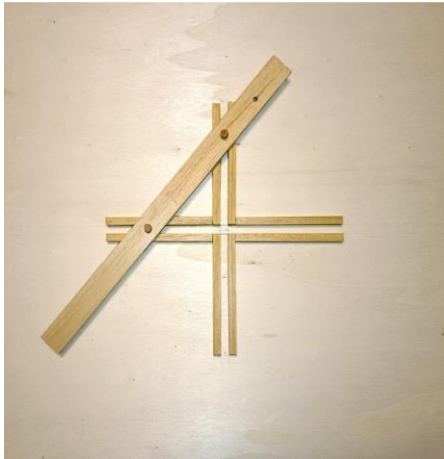


Figura 1 - Fotografia dell'ellissografo di Proclo

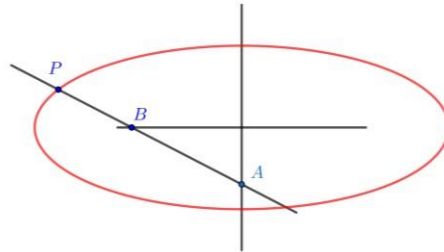


Figura 2 - Immagine virtuale dell'ellissografo di Proclo

Dimensioni della macchina: cm 38.5x37x2.4

Descrizione della macchina: l'ellissografo di Proclo è costituito da due binari fissati alla base e un'asta con inseriti due perni, corrispondenti ai punti A e B, e un foro per poter inserire la mina.

Funzionamento della macchina: l'asta ruota attorno ai due perni, vincolati a scorrere il primo lungo un binario e il secondo lungo l'altro binario. Si disegna così un'ellisse avente semiasse maggiore pari alla distanza tra la punta della matita e il perno A, semiasse minore pari alla distanza tra la punta della matita e il perno B e assi di simmetria coincidenti con i binari ortogonali. Infatti, posti gli assi di riferimento in corrispondenza dei binari e chiamata O l'origine degli assi, sia  $\alpha = \widehat{A\hat{B}O}$ . Allora, posto  $P=(x_p, y_p)$ , risulta  $x_p = a \cdot \cos(\alpha)$  e  $y_p = b \cdot \sin(\alpha)$ , che corrisponde ad una rappresentazione parametrica dell'ellisse. Inoltre, si può ricavare l'equazione cartesiana in forma canonica nel modo seguente: se  $P_x$  è la proiezione di P sull'asse x e  $P_y$  la proiezione di P sull'asse y, vale  $PP_y : BP_x = AP : BP$ , da cui  $BP_x = (PP_y \cdot BP)/AP$ . Siccome  $BP_x = \sqrt{PB^2 - PP_x^2}$ , vale  $\sqrt{PB^2 - PP_x^2} = (PP_y \cdot BP)/AP$ . Con le opportune sostituzioni, si ottiene la forma canonica dell'equazione dell'ellisse.



## IPERBOLOGRAFO A FILO



Figura 1 - Fotografia dell'iperbolografo a filo

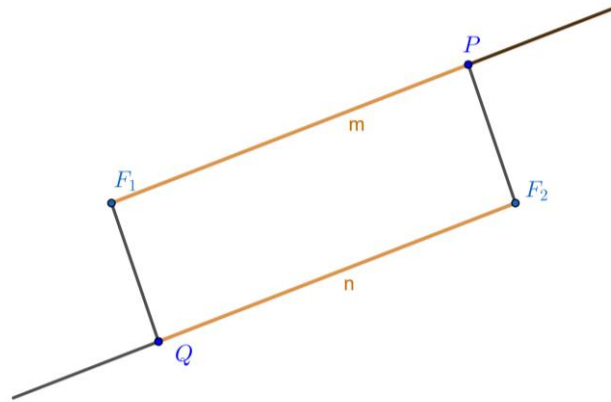


Figura 2 - Immagine virtuale dell'iperbolografo a filo

Dimensioni della macchina: cm 40x38x1

Descrizione della macchina: su un piano sono imperniate due aste  $m$  e  $n$  della medesima lunghezza  $l$  nei punti  $F_1$  e  $F_2$ , detti fuochi. Le aste sono collegate tra loro mediante due fili inestensibili di lunghezza  $a < l$  annodati per un capo a un fuoco e per l'altro all'estremità dell'asta non impernata al fuoco.

Funzionamento della macchina: se si fa ruotare l'asta  $m$  attorno al fuoco  $F_1$  e contemporaneamente con la punta della matita si mantiene il filo teso e accostato all'asta, si disegna un arco di iperbole con fuochi in  $F_1$  e  $F_2$  e asse reale pari ad  $l-a$ . Infatti, chiamata  $P$  la punta della matita sull'asta  $n$  e  $Q$  la punta della matita sull'asta  $m$ , risulta  $PF_1 - PF_2 = QF_2 - QF_1 = l-a$ , ovvero la distanza di  $P$  (e di  $Q$ ) dai due punti  $F_1$  e  $F_2$  ha differenza costante (proprietà caratteristica dell'iperbole).

## MACCHINA PER LA LEMNISCATA DI BERNOULLI

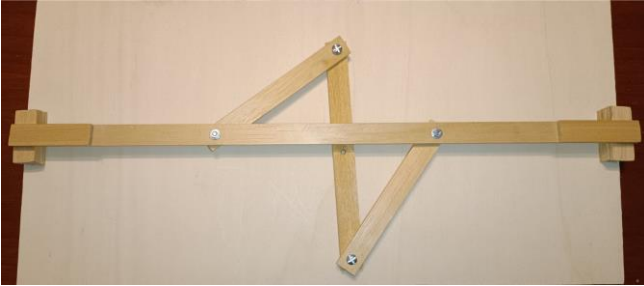


Figura 1 - Fotografia della macchina che realizza la lemniscata di Bernoulli

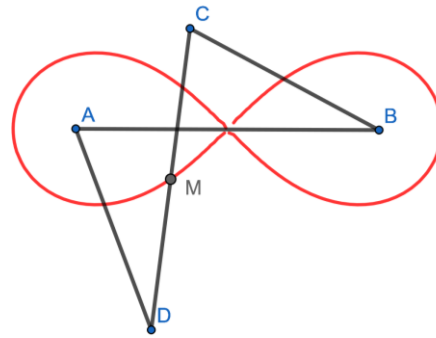


Figura 2 - Immagine virtuale della macchina

Dimensioni della macchina: cm 56x28x3.5

Descrizione della macchina: quattro aste, di cui una fissa, sono posizionate in modo tale da formare un antiparallelogramma ABCD, nel quale  $AB=AD\sqrt{2}$  e A e B sono fissati al piano. Al centro dell'asta CD vi è un foro M per inserire la matita.

Funzionamento della macchina: ponendo la punta della matita nel foro M, quando il punto D percorre la circonferenza di centro A, il punto C percorre la circonferenza di centro B e il punto M descrive la lemniscata di Bernoulli. Infatti, siccome  $AB=AD\sqrt{2}$  e  $AD=DM\sqrt{2}$ , i triangoli AMD e ACD sono simili. Analogamente, i triangoli DCB e MCB sono simili. Perciò, gli angoli  $\widehat{D\hat{A}M}$ ,  $\widehat{A\hat{C}M}$ ,  $\widehat{M\hat{D}B}$ ,  $\widehat{C\hat{B}M}$  sono congruenti, e gli angoli  $\widehat{A\hat{D}M}$ ,  $\widehat{M\hat{B}D}$  sono congruenti. I triangoli AMD e BMD sono simili, da cui  $AM : MD = MD : MB$ . Si ottiene così  $MD^2 = AM \cdot MB$ , ovvero il prodotto delle distanze della punta della matita da due punti fissi è costante (proprietà caratteristica della lemniscata).

## MACCHINA PER LA CURVA KAPPA

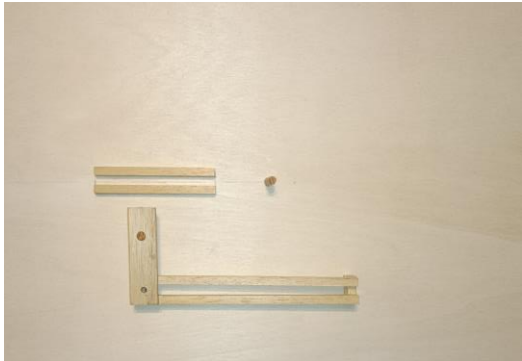


Figura 1 - Fotografia della macchina che realizza la curva kappa

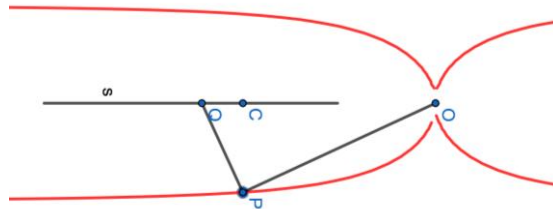


Figura 2 - Immagine virtuale della macchina

Dimensioni della macchina: cm 40x27x2.5

Descrizione della macchina: la macchina è composta da una squadra QPO, da un punto fisso O, lungo il quale il lato PO è vincolato a passare, e da un binario s lungo il quale è vincolato a scorrere il punto Q, a distanza a da P.

Funzionamento della macchina: quando Q scorre su s, il vertice P dell'angolo retto descrive un arco di curva kappa, quartica dotata di due asintoti paralleli rispetto ad s e a distanza a da s. Essendo QPO un triangolo rettangolo, si può sfruttare il secondo teorema di Euclide, secondo cui  $PC^2 = QC \cdot OC$ , dove C è la proiezione di P sul segmento s. Inoltre, per il teorema di Pitagora, vale  $QC = \sqrt{QP^2 - PC^2}$ . Ponendo  $QP=a$ ,  $PC=x$  e  $OC=y$ , si ottiene  $x^4 = (a^2 - x^2)y^2$ , che corrisponde all'equazione cartesiana della curva kappa.

## MACCHINA PER LA CONCOIDE DI NICOMEDE



Figura 1 - Fotografia della macchina che realizza la concoide di Nicomede

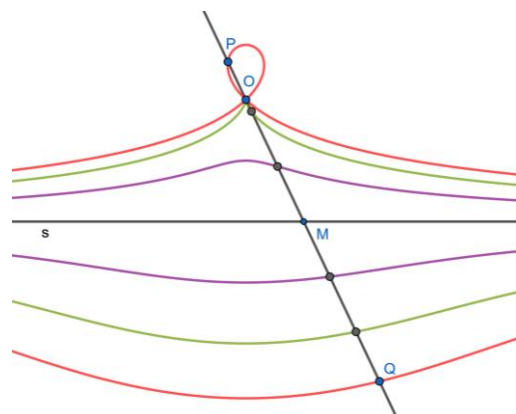


Figura 2 - Immagine virtuale della macchina

Dimensioni della macchina: cm 40x27x2.5

Descrizione della macchina: la macchina è composta da un binario  $s$ , un perno fisso  $O$  a distanza  $d$  da  $s$  e un'asta vincolata a passare per il punto  $O$ , dotata di un perno  $M$  vincolato a scorrere lungo il binario  $s$  e di alcuni fori per poter inserire la matita.

Funzionamento della macchina: quando  $M$  scorre lungo  $s$  e l'asta è vincolata a passare per  $O$ , ogni coppia di punti  $P$  e  $Q$  dell'asta, simmetrici rispetto a  $M$ , descrive una concoide, curva per cui  $PM=QM=k$ , la cui forma dipende dalla distanza  $k$  dei punti  $P$  e  $Q$  da  $M$ . Il punto  $O$  è un nodo se  $k>d$ , una cuspide se  $k=d$  e un punto isolato se  $k<d$ . Rispetto ad un sistema di riferimento con origine in  $O$  e asse delle  $y$  parallelo ad  $s$ , posto  $H$  la proiezione di  $O$  su  $s$ , i triangoli  $OMH$  e  $OPP_x$ , dove  $P_x$  è la proiezione di  $P$  sull'asse  $x$ , sono simili. Perciò, ponendo  $OH=d$ ,  $OP_x=x$ , si ottiene  $OM=(OP \cdot d)/x$ . Inoltre,  $OM = OP - MP$ ; ponendo  $MP=k$  e sfruttando il teorema di Pitagora, si ricava  $\sqrt{(x^2 + y^2)} - k = [\sqrt{(x^2 + y^2)} \cdot d]/x$ . Si ottiene così  $(x - d)^2(x^2 + y^2) = k^2x^2$ , che corrisponde all'equazione cartesiana della concoide di Nicomede per il sistema di riferimento scelto.



# Bibliografia

- [1] P. Accomazzo, S. Beltramino e A. Sargent. *Esplorazioni matematiche con Geogebra*. LedizioniLediPublishing, 2013.
- [2] E. Brieskorn e H. Knorrer. *Plane Algebraic Curve*. Birkhauser, 1986.
- [3] Consiglio dell'Unione Europea (2018). "Raccomandazione del Consiglio del 22 maggio 2018 relativa alle competenze chiave per l'apprendimento permanente." In: *Gazzetta ufficiale dell'Unione europea* 189.C (2018), pp. 1–13.
- [4] R. Descartes. *Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la verité dans les sciences. Plus la Dioptrique, le Météores et la Géométrie, qui sont des esseis de cete Méthode*. 1637. URL: <https://archive.org/details/geometryofrene00desc/page/144/mode/2up?view=theater>.
- [5] B. de Finetti. "Il "saper vedere" in Matematica". In: *La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana* 8.3 (2015), pp. 299–408.
- [6] E. Fischbein. "The Theory of Figural Concepts". In: *Springer* 24.2 (1993), pp. 139–162. URL: <http://www.jstor.org/stable/3482943?origin=JSTOR-pdf>.
- [7] G. Fischer. *Plane Algebraic Curve*. American Mathematical Society, 2001.
- [8] A. Frajese e L. Maccioni. *Gli Elementi di Euclide*. Unione Tipografico Editrice torinese, 1970.
- [9] P. Freguglia. *La geometria fra tradizione e innovazione: temi e metodi geometrici nell'età della rivoluzione scientifica 1550-1650*. Bollati Boringhieri, 1999.
- [10] G. Loria. *Curve piane speciali algebriche e trascendenti*. Ulrico Hoepli, 1930.

- [11] M. A. Mariotti. “Saper vedere in matematica alla luce della ricerca in didattica. Visualizzare in geometria come problema didattico”. In: *Rivista dell’Unione Matematica Italiana* 8.3 (2015), pp. 109–142. URL: [http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI\\_2015\\_1\\_8\\_3\\_109\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2015_1_8_3_109_0).
- [12] E. Miragliotta, A. Baccaglini-Frank e L. Tomasi. “Apprendimento della geometria e abilità visuo-spaziali: un possibile quadro teorico e un’esperienza didattica”. In: *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate* 40B.3 (2017), pp. 339–361.
- [13] MIUR. “Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento”. 2010. URL: [https://www.indire.it/lucabas/lkmw\\_file/licei2010/indicazioni\\_nuovo\\_impaginato/\\_decreto\\_indicazioni\\_nazionali.pdf](https://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf).
- [14] I. Newton. *De methodis serierum et fluxionum*. Henry Woodfall, 1736. URL: <https://archive.org/details/methodoffluxions00newt/page/30/mode/2up?view=theater>.
- [15] L. Di Nicolantonio. “Macchine matematiche e cecità. Strumenti, proposte e percorsi didattici per la scuola secondaria.” Tesi di laurea magistrale. Alma Mater Studiorum Università di Bologna, Italia, 2020.
- [16] Luigi P. “Note sulla diffusione della Géométrie di Descartes in Italia nel secolo XVII”. In: *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche* 2.2 (1982), pp. 249–288.
- [17] A. Raggi. “Macchine matematiche dalla storia alla scuola. Percorso in una secondaria di secondo grado”. Tesi di laurea magistrale. Alma Mater Studiorum Università di Bologna, Italia, 2019. URL: [https://amslaurea.unibo.it/19496/1/alessia\\_raggi\\_tesi.pdf](https://amslaurea.unibo.it/19496/1/alessia_raggi_tesi.pdf).

# Ringraziamenti

Al termine di questa tesi, ritengo importante ringraziare chi mi ha accompagnato durante questo percorso universitario e mi ha aiutato ad affrontare tutte le difficoltà.

Innanzitutto ringrazio la mia famiglia. Sono grata della presenza dei miei genitori e di mio fratello, che mi hanno sempre sostenuto e incoraggiato in ogni fase della mia vita.

Un enorme grazie va a tutti i miei amici. Mi ritengo estremamente fortunata nell'aver avuto l'opportunità di circondarmi di persone così speciali, che mi hanno fatto crescere e maturare.

Ringrazio la professoressa Anna Molari, con cui ho svolto il tirocinio. Mi ha fornito moltissimi consigli preziosi sull'insegnamento e mi ha permesso di fare esperienza nel settore lavorativo a cui aspiro.

Ringrazio il professor Maurizio Casali, che è stato presente durante la realizzazione del progetto presso il Liceo Righi e che mi ha aiutato a svolgerlo con cura.

Infine, ringrazio profondamente la professoressa Alessia Cattabriga. Durante tutti questi mesi, si è dimostrata molto paziente e attenta. La sua disponibilità, la sua precisione e la sua competenza mi hanno colpito incredibilmente e mi hanno incoraggiato ancora di più a lavorare con dedizione a questa tesi.